Г.А. Шишкин

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

Улан-Удэ
2007

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
БУРЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г.А. Шишкин

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

Допущено Учебно-Методическим Объединением по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 010100 Математика (010101)

Учебное пособие
по спецкурсу и спецсеминару

Улан-Удэ
Издательство Бурятского госуниверситета
2007

УДК 517.948
Ш 655

Утверждено к печати редакционно-издательским и учебно-методическим советами
Бурятского государственного университета

Р е ц е н з е н т ы

В.А. Ильин – д-р физ-мат. наук, проф. МГУ, академик РАН
Ц.Б. Шойнжуров – д-р физ-мат. наук, проф. Восточно-сибирского государственного университета

.

Шишкин Г.А.
Ш 655 **Линейные интегродифференциальные уравнения Фредгольма:** Учеб. пособие по спецкурсу и спецсеминару. – Улан-Удэ: Издательство Бурятского госуниверситета, 2007. – 195 с.

В учебном пособии изложены основные разделы теории интегро-дифференциальных уравнений. Введены понятия, аналогичные основным понятиям теории интегральных уравнений Фредгольма, а также доказаны аналоги теорем Фредгольма, полученные академиком А.И.Некрасовым и опубликованные им в 1934 г.

Рассмотрены задача Коши, специфическая задача Коши, краевые задачи, некоторые особенности интегродифференциальных уравнений Фредгольма, приближенные методы решения и возможности решения в замкнутом виде, как для уравнений с обыкновенным аргументом, так и для уравнений с запаздывающим аргументом.

Пособие предназначено для студентов специальностей «Математика», «Прикладная математика и информатика», а также для молодых преподавателей и аспирантов, специализирующихся в области функциональных уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

С задачами, которые приводят к интегродифференциальным уравнениям, физики и математики столкнулись еще в XVIII-XIX веках.

Из первых задач, которые приводят к решению интегродифференциальных уравнений, можно привести:

1) задачу Проктора о равновесии упругой балки

$$\alpha_1 y^{IV}(x) + y(x) = -\alpha_2 \int_{-1}^{1} K(x,t) y^{IV}(t)dt;$$

2) задачу Вольтерра о крутильных колебаниях

$$\omega'(t) = k\left[f(t) - m\omega(t)\right] + \int_0^t K(t,s)\left[f(s) - m\omega(s)\right]ds;$$

3) задачу Прандтля расчета крыла самолета

$$g(x) = \frac{\pi}{\Delta(x)}\left[1 + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{dg(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{t-x}\right].$$

История разработки теории интегродифференциальных уравнений началась с работ Бурбаки в 1903 г. В 1934 г. были опубликованы серьезные результаты по решению и исследованию интегродифференциальных уравнений А.И. Некрасовым[31].Идеи этой работы затем развивались В.В. Васильевым [6]-[11], Т.И. Виграненко [12]-[14], Я.В. Быковым [3]-[5] и другими.

К интегродифференциальным уравнениям относят такие функциональные уравнения, в которых неизвестная функция и ее производные входят как под знак интеграла, так и могут находиться вне его. Следовательно, в отличие от интегральных уравнений они содержат еще и производные неизвестной функции. Интегродифференциальные уравнения, как и интегральные, делятся на уравнения типа Фредгольма и Вольтерра.

Приведем общий пример нелинейного интегродифференциального уравнения типа Фредгольма:

$$F\left[x, z(x), z'(x),..., z^{(n)}(x)\right] - \lambda\int_a^b K\left[x, y, z(y), z'(y),...z^{(m)}(y)\right]dy = f(x).$$

Некоторыми частными видами интегродифференциальных уравнений занимались В.Бушам [35], Я.В.Быков [3]-[5], В.В.Васильев [6]-

-[11],Т.И.Виграненко[12]-[14], В.Вольтерра [36]-[41], Л.Е.Кривошеин [22]-[23], Ю.К.Ландо [26]-[28], Н.Н.Назаров [30] и др.

Вопросы существования и единственности решения рассматривались в работах Б.М. Галаева [16], А.И. Егорова [17], О. Женхэна [18], Т.А. Кокаревой [21] и др. Приближенные методы - в работах К.Б. Бараталиева [2], Л.Е. Кривошеина [23] и др.

В главе I учебного пособия изложена классическая теория линейных интегродифференциальных уравнений Фредгольма, доказаны аналоги теорем Фредгольма.

Рассмотрены задача Коши, специфическая задача Коши, краевые задачи и некоторые особенности решения в зависимости от соотношения порядков внешнего и внутреннего дифференциальных операторов.

Глава I обобщает некоторые результаты, опубликованные рядом авторов [1]-[31] и [35]-[41], а также курс лекций, читавшийся проф. В.В.Васильевым для студентов Иркутского государственного университета специальностей «Математика» и «Прикладная математика» в 1970-1990 г.

В главе II рассматривается возможный вариант решения и исследования с использованием фундаментальной системы решений внутреннего дифференциального оператора, а в главе III и IV без использования фундаментальных систем решений внутреннего и внешнего дифференциальных операторов.

В главе IV рассматриваются приближенные приемы решения как для задачи Коши, так и для краевых задач при различных соотношениях порядков внешнего и внутреннего дифференциальных операторов.

В главах II-IV обобщены некоторые исследования авторов [22]-[32] и исследования автора данного пособия.

В главу V включены некоторые последние исследования автора [43]-[49] по применению одной модификации функции гибкой структуры [24]-[25] при преобразовании начальных и краевых задач для линейных интегродифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом к разрешающим интегральным уравнениям с обыкновенным аргументом.

Глава I
Аналоги теорем Фредгольма
§1. Аналог первой теоремы Фредгольма

1. ***Построение разрешающего интегрального уравнения, когда порядок внешнего дифференциального оператора больше порядка внутреннего***

Рассмотрим уравнение

$$L_n[z(x)] + \lambda \int_a^b K(x,y) P_m[z(y)]dy = 0, \qquad (1)$$

где

$$L_n[z(x)] = \frac{d^n z(x)}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}z(x)}{dx^{n-1}} + ... + a_n(x)z(x),$$

$$P_m[z(y)] = b_0(y)\frac{d^m z(y)}{dy^m} + b_1(y)\frac{d^{m-1}z(y)}{dy^{m-1}} + ... + b_m(y)z(y),$$

коэффициенты обоих дифференциальных операторов – непрерывные функции, ядро $K(x,y)$ – регулярно в квадрате $a \le x$, $y \le b$, λ – числовой параметр и $n > m$.

Поставим задачу – вывести разрешающее интегральное уравнение. Пусть $z_1(\mathrm{x})$, $z_2(\mathrm{x})$,…, $z_n(x)$ – фундаментальная система решений дифференциального уравнения

$$L_n[z(x)] = 0, \qquad (2)$$

тогда его общий интеграл запишется

$$z(x)=c_1z_1(x)+c_2 z_2(x)+\ldots+ c_n z_n(x). \qquad (3)$$

Предположим, что в уравнении (1)

$$L_n[z(x)] = F(x), \qquad (4)$$

где $F(x)$ – пока неизвестная функция.

Чтобы выразить $z(x)$ в уравнении (4) через неизвестную функцию $F(x)$ применим метод вариации произвольных постоянных, т.е. решение уравнения (4) будем искать в виде

$$z(x)=C_1(x)\, z_1+ C_2(x)\, z_2+\ldots+ C_n(x)\, z_n. \qquad (3^*)$$

Тогда неизвестные $c_i(x)$ определятся из системы

$$
\begin{cases}
z_1 C_1' + z_2 C_2' + \ldots + z_n C_n' = 0, \\
z_1' C_1' + z_2' C_2' + \ldots + z_n' C_n' = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_1^{(n-2)} C_1' + z_2^{(n-2)} C_2' + \ldots + z_n^{(n-2)} C_n' = 0, \\
z_1^{(n-1)} C_1' + z_2^{(n-1)} C_2' + \ldots + z_n^{(n-1)} C_n' = F(x).
\end{cases} \tag{5}
$$

Главный определитель этой системы $\Delta(x)$ – определитель Вронского фундаментальной системы функций z_i, $i = \overline{1, n}$ уравнения (2).

$$
\Delta(x) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_n \\ z_1' & z_2' & \ldots & z_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \ldots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{6}
$$

Тогда по формулам Крамера найдем

$$
C_i'(x) = \frac{\begin{vmatrix} z_1 \ldots z_{i-1} & 0 & z_{i+1} \ldots z_n \\ z_1' \ldots z_{i-1}' & 0 & z_{i+1}' \ldots z_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-1)} \ldots z_{i-1}^{(n-1)} & F(x) & z_{i+1}^{(n-1)} \ldots z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\Delta(x)}, i = \overline{1, n}
$$

или, обозначив алгебраические дополнения к элементу $F(x)$ в последней строке через $\Delta_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, получим:

$$
C_i'(x) = \frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)} F(x), \quad i = \overline{1, n} \, . \tag{7}
$$

Интегрируя выражение (7) определим $C_i(x)$:

$$
C_i(x) = \int^x \frac{\Delta_i(\eta)}{\Delta(\eta)} F(\eta) d\eta + c_i \tag{8}
$$

и, подставив $C_i(x)$ в формулу (3*), выразим общий интеграл уравнения (4) в виде

$$
z(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i(x) \left[c_i + \int^x \frac{\Delta_i(\eta)}{\Delta(\eta)} F(\eta) d\eta \right]. \tag{9}
$$

Поставим теперь задачу подобрать функцию F(x) таким образом, чтобы выражение (9) удовлетворяло интегродифференциальному уравнению (1). Для этого, продифференцировав $z(x)$ в (9) n раз и учитывая равенства (5), получим:

$$z^{(k)}(x)=\sum_{i=1}^{n} z_i^{(k)}(x)\left[c_i+\int^{x}\frac{\Delta_i(\eta)}{\Delta(\eta)}F(\eta)d\eta\right],\ \ k=\overline{1,n-1}, \qquad (9_k)$$

$$z^{n}(x)=\sum_{i=1}^{n} z_i^{(n)}(x)\left[c_i+\int^{x}\frac{\Delta_i(\eta)}{\Delta(\eta)}F(\eta)d\eta\right]+F(x). \qquad (9_n)$$

Потребуем теперь, чтобы функция (9) и ее производные (9_k) и (9_n) удовлетворяли уравнению (1). Подставив их выражения в уравнение (1) придем к разрешающему интегральному уравнению специального вида

$$F(x)+\lambda\int_a^b\left[g(y)+\int^{y}\frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}F(\eta)d\eta\right]K(x,y)dy=0, \qquad (10)$$

где $F(x)$ – неизвестная функция,

$$g(y)=\sum_{i=1}^{n}c_iP_m[z_i(y)] \ \text{ и } \ H(\eta,y)=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(\eta)P_m[z_i(y)].$$

2. Решение разрешающего интегрального уравнения специального вида

Решение уравнения (10) будем искать в виде ряда Неймана

$$F(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\varphi_r(x)\lambda^r. \qquad (11)$$

Если решение уравнения (10) представимо в виде ряда (11), то, подставив его в уравнение (10) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим рекуррентные формулы для коэффициентов этого ряда

$$\varphi_1(x)=-\int_a^b g(y)K(x,y)dy,$$

$$\varphi_r(x)=-\int_a^b\int^{y}\frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}K(x,y)\varphi_{r-1}(\eta)d\eta dy,$$

$r=2,3,\ldots$

Докажем сходимость этого ряда при следующих ограничениях (12): $|K(x,y)| \le A$, $\left|\dfrac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}\right| \le M$, $\left|\int_a^b g(y)K(x,y)dy\right| \le N$, $\forall x,y,\eta$, $a \le x,y,\eta \le b$.

$$|\varphi_1(x)| \le N,\ \ |\varphi_2(x)| \le \left|\int_a^b\int^y MAN\,d\eta dy\right| = MAN\frac{|b^2-a^2|}{2},$$

$$|\varphi_r(x)| \le M^{r-1}A^{r-1}N\frac{|b^2-a^2|^{r-1}}{2^{r-1}},\ r=1,2,\dots\ .$$

Из правых частей оценок коэффициентов ряда (11) составим числовой ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} M^{r-1}A^{r-1}N\frac{|b^2-a^2|^{r-1}}{2^{r-1}}\cdot|\lambda|^r. \qquad (13)$$

Нетрудно увидеть, что члены ряда (13) представляют собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = MA\dfrac{b^2-a^2}{2}|\lambda|$ и при $q<1$ он будет сходиться, что будет выполняться при

$$|\lambda| < \frac{2}{MA|b^2-a^2|}. \qquad (14)$$

В силу построения ряда (13) он является мажорирующим для ряда (11) и, следовательно, по критерию Вейерштрасса ряд (11) сходится абсолютно и равномерно $\forall x$, где выполняются ограничения (12) и (14).

Пример 1. Решим уравнение

$$z''-z'-6z+\lambda\int_0^1 z(y)dy = 0,\quad K(x,y)=1,\ \ P_m[z(y)] = z(y).$$

Уравнение (2) будет $z''-z-6z=0$, ему соответствует характеристическое уравнение $k^2-k-6=0$, корни которого $k_1=3$, $k_2=-2$, и соответствующие им линейно независимые решения уравнения (2) будут $z_1(x)=e^{3x}$, $z_2(x)=e^{-2x}$, используя которые, можем записать общее решение в виде $z(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}$.

Для нахождения решения уравнения (4) применим метод вариации произвольных постоянных $\begin{cases} e^{3x}c_1' + e^{-2x}c_2' = 0, \\ 3e^{3x}c_1' - 2e^{-2x}c_2' = F(x), \end{cases}$ откуда находим $\Delta(x) = -5e^{x}$, $\Delta_1(x) = -e^{-2x}$, $\Delta_2(x) = e^{3x}$,

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)}F(x) = \frac{-e^{-2x}}{-5e^{x}}F(x) = \frac{1}{5}e^{-3x}F(x),$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2(x)}{\Delta(x)}F(x) = -\frac{1}{5}e^{2x}F(x),$$

$$C_1(x) = \frac{1}{5}\int^{x} e^{-3\eta}F(\eta)d\eta + C_1, \quad C_2(x) = -\frac{1}{5}\int^{x} e^{2\eta}F(\eta)d\eta + c_2.$$

Далее строим функции $g(y)$ и $H(\eta,y)$ в соответствии с обозначениями в уравнении (10)

$$g(y)= c_1 e^{3y}+ c_2e^{-2y}, \quad H(\eta,y)= -e^{-2\eta} e^{3y}+e^{3\eta}e^{-2y}.$$

Решение уравнения (1) через неизвестную функцию $F(x)$ по формуле (9) запишется:

$$z(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{5}\int^{x}(e^{-3\eta}e^{3x} - e^{2\eta}e^{-2x})F(\eta)d\eta\,,$$

а разрешающее уравнение (10) примет вид

$$F(x) + \frac{\lambda}{5}\int_0^1 dy\int^{y}(e^{-3\eta}e^{3y} - e^{2\eta}e^{-2y})F(\eta)d\eta + \frac{\lambda c_1}{3}(e^3-1) + \frac{\lambda c_2}{2}(1-e^{-2}) = 0.$$

Подставляя решение в виде ряда (11) в разрешающее уравнение, определим коэффициенты этого ряда

$\varphi_1(x) = -\left[\frac{c_1}{3}\left(e^3-1\right) + \frac{c_2}{2}\left(1-e^{-2}\right)\right]$, $\varphi_2(x) = -\frac{1}{6}\left[\frac{c_1}{3}\left(e^3-1\right) + \frac{c_2}{2}\left(1-e^{-2}\right)\right]$,

… , $\varphi_r(x) = -\frac{1}{6^{r-1}}\left[\frac{c_1}{3}\left(e^3-1\right) + \frac{c_2}{2}\left(1-e^{-2}\right)\right]$, … , используя которые, найдем решение уравнения (10)

$$F(x) = -\frac{6\lambda}{6-\lambda}\left[\frac{c_1}{3}(e^3-1) + \frac{c_2}{2}(1-e^{-2})\right].$$

Подставив это решение в формулу (9), получим решение заданного интегро-дифференциального уравнения в виде

$$z(x)=c_1\left[\ell^{3x}+\frac{\lambda(e^3-1)}{3(6-\lambda)}\right]+c_2\left[e^{-2x}+\frac{\lambda(1-e^{-2})}{2(6-\lambda)}\right].$$

Замечание. Нетрудно проверкой установить, что полученное решение удовлетворяет уравнению в примере 1 при всех значениях λ, кроме λ=6. Следовательно, ограничение (14) возникло в связи с применением метода решения и связано с условиями абсолютной и равномерной сходимости ряда (11).

Задание. Самостоятельно найти ограничение (14) для примера 1 и сделать соответствующие выводы.

3. Итерированные ядра и резольвента. Интегральные уравнения резольвенты

Преобразуем коэффициенты ряда (11), для этого выражение $\varphi_1(x)$ подставим в $\varphi_2(x)$, предварительно заменив $\eta\to\eta_1$ и $y\to y_1$ в выражении $\varphi_2(x)$. Тогда, после изменения порядка интегрирования, получим:

$$\varphi_2(x)=-\int_a^b g(y)\left[-\int_a^b dy_1\int^{y_1}\frac{H(\eta_1,y_1)}{\Delta(\eta_1)}K(x,y_1)K(\eta_1,y)d\eta_1\right]dy. \quad (15)$$

Принимая за первое первоначально заданное ядро

$$K_1(x,y)=K(x,y), \quad (15_1)$$

а выражение в квадратных скобках за второе итерированное ядро

$$K_2(x,y)=-\int_a^b dy_1\int^{y_1}\frac{H(\eta_1,y_1)}{\Delta(\eta_1)}K(x,y_1)K(\eta_1,y)d\eta, \quad (15_2)$$

получим: $\varphi_2(x)=-\int_a^b g(y)K_2(x,y)dy$. Затем аналогично преобразуем коэффициент $\varphi_3(x)$

$$\varphi_3(x) = -\int_a^b g(y) K_3(x, y) dy,$$

где

$$K_3(x,y) = -\int_a^b dy_1 \int^{y_1} \frac{H(\eta_1, y_1)}{\Delta(\eta_1)} K(x, y_1) K_2(\eta_1, y) d\eta_1; \qquad (15_3)$$

и так далее

$$\varphi_r(x) = -\int_a^b g(y) K_r(x, y) dy,$$

где

$$K_r(x, y) = -\int_a^b dy_1 \int^{y_1} \frac{H(\eta_1, y_1)}{\Delta(\eta_1)} K(x, y_1) K_{r-1}(\eta_1, y) d\eta_1, \; r = 2,3,... \; . \qquad (15_r)$$

Подставив новые выражения коэффициентов $\varphi_r(x)$ в ряд (11) и, в силу равномерной сходимости этого ряда, сгруппировав все слагаемые под одним интегралом, найдем

$$F(x) = -\lambda \int_a^b g(y) \left[K(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \lambda^2 K_3(x, y) + ... + \lambda^{r-1} K_r(x, y) + ... \right] dy.$$

Ряд в квадратных скобках назовем резольвентой и обозначим

$$R(x,y;\lambda) = K(x,y) + \lambda K_2(x,y) + \ldots + \lambda^{r-1} K_r(x,y) + \ldots \; . \qquad (16)$$

Тогда решение разрешающего уравнения через резольвенту запишется

$$F(x) = -\lambda \int_a^b g(y) R(x, y; \lambda) dy. \qquad (11^*)$$

Нетрудно доказать равномерную и абсолютную сходимость резольвенты, аналогично, как это было сделано для ряда (11) и при тех же ограничениях.

Если при преобразованиях коэффициентов $\varphi_r(x)$ воспользоваться другим порядком перестановки интегралов, то получим другую формулу для итерированных ядер

$$K_r(x, y) = -\int_a^b dy_1 \int^{y_1} \frac{H(\eta_1, y_1)}{\Delta(\eta_1)} K_{r-1}(x, y_1) K(\eta_1, y) d\eta_1, \; r = 2, 3, ..., \qquad (17_r)$$

Задание проделать самостоятельно.

Интегральных уравнений резольвенты тоже можно составить два. В ряд резольвенты (16) подставим значения итерированных ядер (15_r), $r = 1, 2\ldots$.

$$R(x,y;\lambda) = K(x,y) - \lambda \int_a^b dy_1 \int^{y_1} \frac{H(\eta_1, y_1)}{\Delta(\eta_1)} K(x,y_1) K(\eta_1, y) d\eta_1 -$$

$$-\lambda^2 \int_a^b dy_1 \int^{y_1} \frac{H(\eta_1, y_1)}{\Delta(\eta_1)} K(x,y_1) K_2(\eta_1, y) d\eta_1 - \ldots. -$$

$$-\lambda^{r-1} \int_a^b dy_1 \int^{y_1} \frac{H(\eta_1, y_1)}{\Delta(\eta_1)} K(x,y_1) K_{r-1}(\eta_1, y) d\eta_1 + \ldots \ .$$

В силу равномерной сходимости выражение для резольвенты можем переписать

$$R(x,y;\lambda) = K(x,y) - \lambda \int_a^b dy_1 \int^{y_1} \frac{H(\eta_1, y_1)}{\Delta(\eta_1)} K(x,y_1) \big[K(\eta_1, y) +$$

$$+ \lambda K_2(\eta_1, y) + \ldots + \lambda^{r-2} K_{r-1}(\eta_1, y) + \ldots\big] d\eta_1,$$

откуда видим, что в квадратных скобках тоже резольвента и

$$R(x,y;\lambda) = K(x,y) - \lambda \int_a^b dy_1 \int^{y_1} \frac{H(\eta_1, y_1)}{\Delta(\eta_1)} K(x,y_1) R(\eta_1, y;\lambda) d\eta_1 \ . \quad (18_1)$$

Если же в ряд резольвенты (16) подставить выражения итерированных ядер (17_r), то, проделав аналогичные выкладки, получим следующее уравнение резольвенты

$$R(x,y;\lambda) = K(x,y) - \lambda \int_a^b dy_1 \int^{y_1} \frac{H(\eta_1, y_1)}{\Delta(\eta_1)} K(\eta_1, y) R(x, y_1;\lambda) d\eta_1 \ . \quad (18_2)$$

4. Характеристический полином и минорный ряд А.И. Некрасова

Применив ряд Неймана (11) при решении разрешающего уравнения (10), мы получили ограничения на λ (14). Естественно возникает вопрос, существенное это ограничение или возникло в связи с выбранным способом решения. На эти сомнения наталкивает и приведенный пример 1.

Далее будем решать уравнение (10) без жестких ограничений на параметр λ. Для этого введём новую неизвестную функцию

$$\int^{x} \frac{H(\eta,x)}{\Delta(\eta)} F(\eta)d\eta = \Phi(x) \qquad (19)$$

и, подставив F(x) из (10) в равенство (19), получим

$$\Phi(x) = \int^{x} \frac{H(\eta,x)}{\Delta(\eta)} \left[-\lambda \int_a^b K(\eta,y)g(y)dy - \lambda \int_a^b K(\eta,y)\Phi(y)dy \right] d\eta,$$

откуда, вводя обозначения для известных выражений, придем к интегральному уравнению Фредгольма

$$\Phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b M(x,y)\Phi(y)dy, \qquad (20)$$

где

$$f(x) = -\lambda \int^{x} \frac{H(\eta,x)}{\Delta(\eta)} \int_a^b K(\eta,y)g(y)dyd\eta, \quad M(x,y) = -\int^{x} \frac{H(\eta,x)}{\Delta(\eta)} K(\eta,y)d\eta.$$

К уравнению (20) применим теорию Фредгольма, в соответствии с которой выпишем характеристический полином $D(\lambda)$

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b M(x_1,x_1)dx_1 + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} M(x_1,x_1) & M(x_1,x_2) \\ M(x_2,x_1) & M(x_2,x_2) \end{vmatrix} dx_1 dx_2 -$$

$$- .... + (-1)^p \frac{\lambda^p}{p!} \int_a^b ... \int_a^b \begin{vmatrix} M(x_1,x_1) & M(x_1,x_2) & ... & M(x_1,x_p) \\ M(x_2,x_1) & M(x_2,x_2) & ... & M(x_2,x_p) \\ ... & ... & ... & .. \\ M(x_p,x_1) & M(x_p,x_2) & ... & M(x_p,x_p) \end{vmatrix} dx_1..dx_p + ...$$

и затем, подставив ядро $M(x,y)$ из (20) в $D(\lambda)$ и преобразовав определители, получим характеристический полином для уравнения (1)

$$D(\lambda) = 1 + \lambda \int_a^b dy_1 \int^{y_1} \frac{H(x_1,y_1)}{\Delta(x_1)} K(x_1,y_1)dx_1 +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b dy_1 dy_2 \int^{y_1} \int^{y_2} \frac{H(x_1,y_1)H(x_2,y_2)}{\Delta(x_1)\Delta(x_2)} \begin{vmatrix} K(x_1,y_1) & K(x_1,y_2) \\ K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) \end{vmatrix} dx_1 dx_2 + ...$$

$$+\frac{\lambda^p}{p!}\int_a^b\ldots\int_a^b dy_1\ldots dy_p\int^{y_1}\ldots\int^{y_p}\frac{H(x_1,y_1)\ldots H(x_p,y_p)}{\Delta(x_1)\ldots\Delta(x_p)}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} K(x_1,y_1) & \ldots & K(x_1,y_p) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ K(x_p,y_1) & \ldots & K(x_p,y_p) \end{vmatrix} dx_1\ldots dx_p+\ldots\ . \qquad (21)$$

Что и следовало ожидать, так как в силу эквивалентности уравнений (10) и (20) характеристические числа этих уравнений должны совпадать. Вводя обозначения

$$\begin{vmatrix} K(\alpha_1,\beta_1) & \ldots & K(\alpha_1,\beta_p) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ K(\alpha_p,\beta_1) & \ldots & K(\alpha_p,\beta_p) \end{vmatrix} = K\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_p \\ \beta_1 & \ldots & \beta_p \end{pmatrix}$$

перепишем

$$D(\lambda)=1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\lambda^p}{p!}\int_a^b\ldots\int_a^b dy_1\ldots dy_p\int^{y_1}\ldots\int^{y_p}\frac{H(x_1,y_1)\ldots H(x_p,y_p)}{\Delta(x_1)\ldots\Delta(x_p)}\times$$

$$\times K\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_p \\ y_1 & \ldots & y_p \end{pmatrix} dx_1\ldots dx_p\ . \qquad (21^*)$$

Вернемся к решению уравнения (10) в виде (11*)

$$F(x)=-\lambda\int_a^b g(y)R(x,y;\lambda)dy.$$

Резольвенту будем искать в виде $R(x,y;\lambda)=\dfrac{D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda}{D(\lambda)}$, где $D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda$ – пока неизвестная функция. Тогда решение уравнения (10) примет вид

$$F(x)=-\frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b g(y)D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda\, dy\ . \qquad (22)$$

Для определения функции $D\begin{pmatrix} x \\ & \lambda \\ y \end{pmatrix}$ воспользовавшись уравнением резольвенты (18_1) получим интегральное уравнение

$$D\begin{pmatrix} x \\ & \lambda \\ s \end{pmatrix} = D(\lambda)K(x,s) - \lambda\int_a^b dy\int^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}K(x,y)D\begin{pmatrix} \eta \\ & \lambda \\ s \end{pmatrix}d\eta\,. \quad (23)$$

Выберем эту функцию с помощью ряда

$$D\begin{pmatrix} x \\ & \lambda \\ s \end{pmatrix} = \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x,s)\lambda^r\,, \quad (24)$$

подставив его в равенство (23) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим

$$A_0(x,s) = K(x,s)\,,$$

$$A_1(x,s) = \int_a^b dy_1\int^{y_1}\frac{H(x_1,y_1)}{\Delta(x_1)}K(x_1,y_1)K(x,s)dx_1 -$$

$$-\int_a^b dy\int^y \frac{H(\eta,y\ )}{\Delta(\eta)}K(x,y)K(\eta,s)d\eta =$$

$$= \int_a^b dy_1\int^{y_1}\frac{H(x_1,y_1)}{\Delta(x_1)}\begin{vmatrix} K(x,s) & K(x,y_1) \\ K(x_1,s) & K(x_1,y_1)\end{vmatrix}dx_1.$$

Аналогично найдем

$$A_2(x,s) = \frac{1}{2!}\int_a^b\int_a^b dy_1dy_2\int^{y_1}\int^{y_2}\frac{H(x_1,y_1)H(x_2,y_2)}{\Delta(x_1)\Delta(x_2)}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} K(x,s) & K(x,y_1) & K(x,y_2) \\ K(x_1,s) & K(x_1,y_1) & K(x_1,y_2) \\ K(x_2,s) & K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2)\end{vmatrix}dx_1dx_2\,.$$

… … … … … …… … … … … …… … … … … …

$$A_r(x,s)=\frac{1}{r!}\int_a^b\ldots\int_a^b dy_1\ldots dy_r\int^{y_1}\ldots\int^{y_r}\frac{H(x_1,y_1)\ldots H(x_r,y_r)}{\Delta(x_1)\ldots.\Delta(x_r)}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} K(x,s) & \ldots & K(x,y_r)\\ K(x_1,s) & \ldots & K(x_1,y_r)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ K(x_r,s) & \ldots & K(x_r,y_r)\end{vmatrix}dx_1\ldots dx_r$$

… … … … … …… … … … … …… … … … … …

Подставив найденные выражения $A_r(x,s)$ в ряд (24), получим минорный ряд А.И. Некрасова – аналог минорного ряда Фредгольма

$$D\begin{pmatrix} x\\ & \lambda\\ s\end{pmatrix}=K(x,s)+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\lambda^p}{p!}\int_a^b\ldots\int_a^b dy_1\ldots dy_p\int^{y_1}\ldots\int^{y_p}\frac{H(x_1,y_1)\ldots H(x_p,y_p)}{\Delta(x_1)\ldots\Delta(x_p)}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} K(x,s) & K(x,y_1) & \ldots & K(x,y_p)\\ K(x_1,s\ ) & K(x_1,y_1) & \ldots & K(x_1,y_p)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K(x_p,s) & K(x_p,y_1) & \ldots & K(x_p,y_p)\end{vmatrix}dx_1\ldots dx_p. \qquad (25_1)$$

Используя обозначения в формуле (21*) ряд (25_1) перепишется

$$D\begin{pmatrix} x\\ & \lambda\\ s\end{pmatrix}=K(x,s)+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\lambda^p}{p!}\int_a^b\ldots\int_a^b dy_1\ldots dy_p\int^{y_1}\ldots\int^{y_p}\frac{H(x_1,y_1)\ldots H(x_p,y_p)}{\Delta(x_1)\ldots\Delta(x_p)}\times$$

$$\times K\begin{pmatrix} x & x_1 & \ldots & x_p\\ s & y_1 & \ldots & y_p\end{pmatrix}dx_1\ldots dx_p. \qquad (25_1^{\ *})$$

Исследуем на сходимость ряд $D(\lambda)$ (ряд $D\begin{pmatrix} x\\ & \lambda\\ s\end{pmatrix}$ исследуется аналогично).

Для коэффициентов ряда $D(\lambda)$ в (21) введем обозначения

$$d_0 = 1, \quad d_p = \frac{1}{p!}\int_a^b \ldots \int_a^b dy_1 \ldots dy_p \int^{y_1} \ldots \int^{y_p} \frac{H(x_1, y_1) \ldots H(x_p, y_p)}{\Delta(x_1) \ldots \Delta(x_p)} \times$$

$$\times K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_p \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p \,,$$

где

$$K\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_p \\ y_1 & \ldots & y_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & \ldots & K(x_1, y_p) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ K(x_p, y_1) & \ldots & K(x_p, y_p) \end{vmatrix}, \quad p = 1, 2, \ldots \; .$$

Тогда ряд (21) примет вид

$$D(\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} d_p \lambda^p. \qquad (21^*)$$

Для доказательства сходимости ряда (21*) вспомним неравенство Адамара. Если $|K(x, y)| \le A$ при $a \le x, y \le b$, то

$$\left| K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_p \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_p \end{pmatrix} \right| \le A^p \sqrt{p^p} \; ;$$

и пусть $\left| \dfrac{H(x, y)}{\Delta(x)} \right| \le M$, тогда

$$\left| d_p \lambda^p \right| \le |\lambda|^p \frac{1}{p!} M^p A^p \sqrt{p^p} \left| \int_a^b \ldots \int_a^b dy_1 \ldots dy_p \int^{y_1} \ldots \int^{y_p} dx_1 \ldots dx_p \right| =$$

$$= |\lambda|^p \frac{1}{p!} M^p A^p \sqrt{p^p} \, \frac{\left| b^2 - a^2 \right|^p}{2^p} = u_p .$$

Из оценок u_p членов ряда (21*) составим положительный числовой ряд $\sum_{p=0}^{\infty} u_p$, сходимость которого докажем, воспользовавшись признаком Даламбера

$$\ell = \lim_{p\to\infty}\frac{u_{p+1}}{u_p} = \lim_{p\to\infty}\frac{|\lambda|^{p+1}M^{p+1}A^{p+1}\sqrt{(p+1)^{p+1}}\left|b^2-a^2\right|^{p+1}p!2^p}{(p+1)!\cdot 2^{p+1}|\lambda|^p M^p A^p\sqrt{p^p}\,\left|b^2-a^2\right|^p} = 0 < 1,$$

так как

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\sqrt{(p+1)^{p+1}}}{(p+1)\sqrt{p^p}} = \lim_{p\to\infty}\left[\sqrt{\frac{(p+1)^p}{p^p}}\cdot\frac{\sqrt{p+1}}{(p+1)}\right] = \sqrt{e}\cdot\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\sqrt{p+1}} = 0.$$

По построению ряд $\sum_{p=0}^{\infty} u_p$ является мажорирующим для ряда (21*) и, следовательно, по критерию Вейерштрасса ряд (21*) сходится абсолютно и равномерно при всех значениях λ.

Задание. Самостоятельно доказать сходимость ряда (25_1).

5. Существование и единственность решения интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

Прежде чем сформулировать аналог первой теоремы Фредгольма сначала убедимся, что функция $F(x)$ в формуле (22) удовлетворяет уравнению (10). Для этого значение функции $F(x)$ из формулы (22) подставляем в уравнение (10), сокращаем на λ, переименовываем переменные, группируем под одним общим интегралом, вынося общий множитель $g(y_1)$. В результате придем к первому уравнению резольвенты.

$$-\lambda\int_a^b g(y_1)\frac{D\begin{pmatrix} x & \\ & \lambda \\ y_1 & \end{pmatrix}}{D(\lambda)}dy_1+$$

$$+\lambda\int_a^b\left[g(y)+\int^y\frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}\left(-\lambda\int_a^b g(y_1)\frac{D\begin{pmatrix} \eta & \\ & \lambda \\ y_1 & \end{pmatrix}}{D(\lambda)}dy_1\right)d\eta\right]K(x,y)dy=0,$$

$$\int_a^b g(y_1)\left[-\frac{D\begin{pmatrix} x & \\ & \lambda \\ y_1 & \end{pmatrix}}{D(\lambda)}+K(x,y_1)-\lambda\int_a^b\int^y\frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}\frac{D\begin{pmatrix} \eta & \\ & \lambda \\ y_1 & \end{pmatrix}}{D(\lambda)}K(x,y)d\eta dy\right]dy_1=0,$$

откуда, так как $g(y_1)$, вообще говоря, $\neq 0$, то

$$\frac{D\begin{pmatrix} x & \\ & \lambda \\ y_1 & \end{pmatrix}}{D(\lambda)}=K(x,y_1)-\lambda\int_a^b\int^y\frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}\cdot\frac{D\begin{pmatrix} \eta & \\ & \lambda \\ y_1 & \end{pmatrix}}{D(\lambda)}K(x,y)d\eta dy,$$

т.е.

$$R(x,y_1;\lambda)=K(x,y_1)-\lambda\int_a^b\int^y\frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}R(\eta,y_1;\lambda)K(x,y)dyd\eta.$$

Затем докажем единственность решения уравнения (10) в форме (22).

Доказательство проведем методом от противного. Пусть уравнение (10) имеет другое решение $\Phi(x)$, тогда

$$\Phi(x)+\lambda\int_a^b\left[g(y)+\int^y\frac{H(\eta\ ,y)}{\Delta(\eta\ )}\Phi(\eta)d\eta\right]K(x,y)dy\equiv 0. \qquad (26)$$

В этом тождестве заменим x на t, умножим его на

$$\frac{H(t,y_1)}{\Delta(t)}R(x,y_1;\lambda)$$

и проинтегрируем

$$\int_a^b dy_1 \int^{y_1} \frac{H(t,y_1)}{\Delta(t)} R(x,y_1;\lambda)\Phi(t)dt +$$

$$+\lambda \int_a^b dy_1 \int_a^b dy \int^{y_1} \frac{H(t,y_1)}{\Delta(t)} R(x,y_1;\lambda)K(t,y)g(y)dt +$$

$$+\lambda * \int_a^b dy_1^* \int_a^b dy \int^{y_1}\int^{y} \frac{H(\eta,y)H(t,y_1)*}{\Delta(\eta)\Delta(t)*} R(x,y_1;\lambda)*K(t,y)*\Phi(\eta)d\eta dt * \equiv 0.$$

Выражение, отмеченное под «*»:

$\lambda \int_a^b dy_1 \int^{y_1} \frac{H(t,y_1)}{\Delta(t)} K(t,y)R(x,y_1;\lambda)dt = K(x,y) - R(x,y;\lambda)$, – находится из второго интегрального уравнения резольвенты (18_2), подставим его в последнее слагаемое, расписав на сумму интегралов

$$\int_a^b dy_1 \int^{y_1} \frac{H(t,y_1)}{\Delta(t)} R(x,y_1;\lambda)\Phi(t)dt +$$

$$+\lambda \int_a^b dy_1 \int_a^b dy \int^{y_1} \frac{H(t,y_1)}{\Delta(t)} R(x,y_1;\lambda)K(t,y)g(y)dt +$$

$$+\int_a^b dy \int^{y} \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)} K(x,y)\Phi(\eta)d\eta - \int_a^b dy \int^{y} \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)} R(x,y_1;\lambda)\Phi(\eta)d\eta \equiv 0;$$

тогда первое и последнее слагаемое уничтожатся.

$$\int_a^b dy \int^{y} \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)} K(x,y)\Phi(\eta)d\eta \equiv$$
$$\equiv -\lambda \int_a^b dy_1 \int_a^b dy \int^{y_1} \frac{H(t,y_1)}{\Delta(t)} R(x,y_1;\lambda)K(t,y)g(y)dt. \tag{27}$$

Подставив (27) в уравнение (26)

$$\Phi(x) + \lambda \int_a^b g(y)K(x,y)dy -$$

$$-\lambda^2\int_a^b dy\int_a^b dy_1\int^{y_1}\frac{H(t,y_1)}{\Delta(t)}R(x,y_1;\lambda)K(t,y)g(y)dt\equiv 0$$

и, записав разность интегралов под одним, получим

$$\Phi(x)+\lambda\int_a^b g(y)\left[K(x,y)-\lambda\int_a^b dy_1\int^{y_1}\frac{H(t,y_1)}{\Delta(t)}K(t,y)R(x,y_1;\lambda)dt\right]dy\equiv 0.$$

Так как в квадратных скобках резольвента (в соответствии с (18_2)), то $\Phi(x)=-\lambda\int_a^b g(y)R(x,y;\lambda)dy$, т.е. $\Phi(x)=F(x)$. Единственность доказана.

Сформулируем теперь аналог первой теоремы Фредгольма.

Если $D(\lambda)\neq 0$, то разрешающее интегральное уравнение (10) имеет единственное решение, определяемое по формуле (22)

$$F(x)=-\frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b D\begin{pmatrix}x\\ & \lambda\\ y\end{pmatrix}g(y)dy,$$

в котором $D(y)$ и $D\begin{pmatrix}x\\ & \lambda\\ y\end{pmatrix}$ – ряды (21^*) и (25_1^*), сходящиеся абсолютно и равномерно для всех значений λ (в том числе и для комплексных).

Определение. Значения λ, для которых $D(\lambda)=0$, назовем характеристическими или фундаментальными числами ядер $K(x,y)$ и $M(x,y)$.

6. Рекуррентные формулы вычисления коэффициентов характеристического полинома и минорного ряда

Выпишем ряды (21) и (25_1) с неопределенными пока коэффициентами

$$D(\lambda)=\sum_{p=0}^{\infty}d_p\lambda^p,\ (21^*)\qquad \text{и}\quad D\begin{pmatrix}x\\ & \lambda\\ y\end{pmatrix}=\sum_{p=0}^{\infty}d_p^*(x,y)\lambda^p\qquad (25_1^*).$$

Сравнивая слагаемые в формуле (21) с (21*) и в формуле (25_1) с (25_1^*), видим, что $d_0 = 1$, $d_0^*(x, y) = K(x,y)$, а следующие коэффициенты представимы в виде формул

$$d_{p+1} = \frac{1}{(p+1)!}\int_a^b \dots \int_a^b dy_1 \dots dy_{p+1} \int^{y_1} \dots \int^{y_{p+1}} \frac{H(x_1, y_1)\dots H(x_{p+1}, y_{p+1})}{\Delta(x_1)\dots\Delta(x_{p+1})} \times$$
$$\times K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{p+1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{p+1} \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_{p+1}, \tag{28}$$

$$d_p^*(x, y) = \frac{1}{p!}\int_a^b \dots \int_a^b dy_1 \dots dy_p \int^{y_1} \dots \int^{y_p} \frac{H(x_1, y_1)\dots H(x_p, y_p)}{\Delta(x_1)\dots\Delta(x_p)} \times$$
$$\times K\begin{pmatrix} x\, x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ y\, y_1 & y_2 & \dots & y_p \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_p. \tag{29}$$

Умножим равенство (29) на $\dfrac{1}{p+1}\dfrac{H(x, y)}{\Delta(x\ \ )}$ и проинтегрируем по $\int_a^b dy \int^y dx$:

$$\frac{1}{p+1}\int_a^b dy \int^y \frac{H(x, y)}{\Delta(x\ \ )} d_p^*(x, y) dx = \frac{1}{(p+1)!}\int_a^b \dots \int_a^b dy_1 \dots dy_p dy \int^{y_1} \dots$$

$$\dots \int^{y_p} \int^{y} \frac{H(x_1, y_1)\dots H(x_p, y_p) H(x, y)}{\Delta(x_1)\dots\Delta(x_p)\Delta(x\ \ )} K\begin{pmatrix} x\, x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ y\, y_1 & y_2 & \dots & y_p \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_p dx.$$

Нетрудно увидеть, что заменив x на x_1, x_1 на x_2, …, x_p на x_{p+1} и y на y_1, y_1 на y_2, …, y_p на y_{p+1}, в правой части последнего равенства, получим коэффициент d_{P+1}, т.е.

$$d_{p+1} = \frac{1}{p+1}\int_a^b dy \int^y \frac{H(x, y)}{\Delta(x\ \ )} d_p^*(x, y) dx. \tag{28*}$$

Положив в формуле (28*) p=0, найдем

$$d_1 = \int_a^b dy \int^y \frac{H(x,y)}{\Delta(x\ \ )} K(x,y)dx\,.$$

Для определения коэффициентов $d_p^*(x,y)$ воспользуемся интегральным уравнением (23) для $D\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}\lambda$.

Подставив в равенство (23) ряд (25_1^*)

$$\sum_{p=0}^{\infty} d_p^*(x,s)\lambda^p = K(x,y)\sum_{p=0}^{\infty} d_p\lambda^p -$$
$$-\lambda\int_a^b dy\int^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}K(x,y)\sum_{p=0}^{\infty} d_p^*(\eta,s)\lambda^p d\eta\,,$$

приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, заменив при этом s на y и y на y_1, получим

$$\begin{gathered} d_p^*(x,y) = d_p K(x,y) - \\ -\int_a^b dy_1 \int^{y_1} \frac{H(\eta,y_1)}{\Delta(\eta)} K(x,y_1) d_{p-1}^*(\eta,y)d\eta\,. \end{gathered} \qquad (29^*)$$

Теперь, положив p=1 в (29*), определим

$$d_1^*(x,y) = d_1 K(x,y) - \int_a^b dy_1 \int^{y_1} \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)} K(x,y_1)K(\eta,y)d\eta$$

и так далее, используя рекуррентные формулы (28*) и (29*).

Замечание 1. Если $D(\lambda)\neq 0$, т.е. λ не является характеристическим числом, а $D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda \equiv 0$, то разрешающее интегральное уравнение (10) имеет только нулевое решение, и решение интегро-дифференциального уравнения (1) совпадает с решением дифференциального уравнения

$L_n[z(x)]=0$, т.е. $z(x)=c_1z_1+c_2z_1+\ldots+c_nz_n$.

Замечание 2. Если $D(\lambda)=0$, а $D\begin{pmatrix} x \\ & \lambda \\ y \end{pmatrix}\neq 0$, то разрешающее интегральное уравнение (10) имеет одно бесконечное решение, и, соответственно, бесконечное решение будет иметь интегро-дифференциальное уравнение (1).

Замечание 3. Случай $D(\lambda)=0$ и $D\begin{pmatrix} x \\ & \lambda \\ y \end{pmatrix}=0$ будет рассматриваться особо.

Пример 2. $z''(x)+z(x)=\lambda\int\limits_0^{\pi} x[z'(y)+z(y)]dy$.

$z''(x)+z(x)=0$, $k^2+1=0$, $k_{1,2}=\pm i$, $z_1(x)=cos\ x$, $z_2=sin\ x$, $z(x)=c_1cos\ x+c_2\ sin\ x$, $z''(x)+z(x)=F(x)$, $z(x)=C_1(x)z_1(x)+C_2(x)z_2(x)$.

$$\begin{cases} C_1'cos\,x+C_2'\sin x=0, \\ -C_1'\sin x+C_2'cos\,x=F(x), \end{cases}$$

$$C_1'=\frac{-\sin x}{1}F(x),\quad C_2'=\frac{\cos x}{1}F(x).$$

В соответствии с обозначениями в (7) и (10) найдем

$\Delta(x)=1$, $\Delta_1(x)=-sin\,x$, $\Delta_2(x)=cos\,x$, $P_1[z(y)]=z'(y)+z(y)$,

$P_1[z_1(y)]=-sin\,y+cos\,y$, $P_1[z_2(y)]=cos\,y+sin\,y$.

$g(y)=c_1P_1[z_1(y)]+c_2P_1[z_2(y)]=c_1(cos\,y-sin\,y)+c_2(cos\,y+sin\,y)$,

$H(\eta,y)=\Delta_1(\eta)P_1[z_1(y)]+\Delta_2(\eta)P_1[z_2(y)]=-sin\,\eta(cos\,y-sin\,y)+$

$+cos\,\eta(cos\,y+sin\,y)$.

Теперь найдем коэффициенты рядов (21*) и (25_1*), воспользовавшись рекуррентными формулами (28*) и (29*)

$$d_0=1,\quad d_0^*(x,y)=-x,\quad d_1=\int\limits_a^b\int\limits^y\frac{H(x,y)}{\Delta(x)}K(x,y)dxdy,$$

$$d_1 = \int_0^{\pi} dy \int^{y} [-\sin\ x(\cos y - \sin y) + \cos x(\cos y + \sin y)](-x)dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[(\cos y - \sin y)\int^{y} x \sin \mathrm{x} dx - (\cos y + \sin y)\int^{y} x \cos \mathrm{x} dx \right] dy =$$

$$= \int_0^{\pi} [(\cos y - \sin y)(\sin y - y\cos y) - (\cos y + \sin y)(y\sin y + \cos y)]dy =$$

$$= \int_0^{\pi} (\cos y \sin y - \sin^2 y - y\cos^2 y + y\sin y\ \cos y\ - y\sin y\ \cos y -$$

$$- y\sin^2 y - \cos^2 y - \sin y\ \cos y)dy = \int_0^{\pi} (-1-y)dy = -(\frac{\pi^2}{2} + \pi),$$

$$d_1^*(x,y) = d_1 K(x,y) - \int_a^b dy_1 \int^{y_1} \frac{H(\eta, y_1)}{\Delta(\eta)} K(x, y_1) d_0^*(\eta, y) d\eta\,,$$

$$d_1^*(x,y) = (\frac{\pi^2}{2} + \pi)x -$$

$$- \int_0^{\pi} \int^{y_1} [-\sin \eta(\cos y_1 - \sin y_1) + \cos\eta(\cos y_1 + \sin y_1)] x\eta d\eta dy_1 =$$

$$= (\frac{\pi^2}{2} + \pi)x - x\int_0^{\pi} [(\cos y_1 - \sin y_1)(y_1 \cos y_1 - \sin y_1) +$$

$$+ (\cos y_1 + \sin y_1)(y_1 \sin y_1 + \cos y_1)]dy_1 = (\frac{\pi^2}{2} + \pi)x - (\frac{\pi^2}{2} + \pi)x = 0,$$

следовательно, d_2=0, $d_2^*(x,y) = 0$ и т.д.

По формулам (21*) и (25_1*) находим

$$D(\lambda) = 1 - (\frac{\pi^2}{2} + \pi)\,\lambda,\ D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda = -x\,.$$

Тогда в соответствии с формулами (11_2) и (22) определим сначала $F(x)$

$$F(x) = -\frac{\lambda}{1-(\pi+\frac{\pi^2}{2})\lambda}\int_0^{\pi}(-x)[c_1(\cos y - \sin y) + c_2(\cos y + \sin y)]dy =$$

$$= \frac{2\lambda(c_2 - c_1)}{1-(\pi+\frac{\pi^2}{2})\lambda}x$$

и затем по формуле (9) $z(x)$

$$z(x) = c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) - \int^{x}\frac{\Delta_1(\eta)z_1(x) + \Delta_2(\eta)z_2(x)}{\Delta(\eta)}F(\eta)d\eta,$$

$$z(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{2\lambda(c_2 - c_1)}{1-(\pi+\frac{\pi^2}{2})\lambda}x, \quad \text{при } \lambda \neq \frac{1}{\pi+\frac{\pi^2}{2}}.$$

7. Решение задачи Коши

Рассмотрим начальную задачу для интегро-дифференциального уравнения (1) с начальными условиями

$$z^{(i)}(x_0) = z_0^i, \; i = \overline{0, n-1} \text{ и } x_0 \in [a,b]. \qquad (1^*)$$

Учитывая начальные условия, формулу (9) – представление решения уравнения (1) через неизвестную функцию $F(x)$ – можем переписать

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i(x)\left[c_{i0} + \int_{x_0}^{x}\frac{\Delta_i(\eta)}{\Delta(\eta)}F(\eta)d\eta\right]. \qquad (9_0)$$

Значения постоянных c_{i0} можно определить на этом этапе решения начальной задачи. Положив $x=x_0$ в формуле (9_0), получим линейную алгебраическую систему относительно c_{i0}

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^{(k)}(x_0)c_{i0} = z_0^{(k)}, \quad k = \overline{0, n-1}\ , \qquad (5_0)$$

которая всегда разрешима, так как главный определитель этой системы есть значение определителя Вронского $\Delta(x)$ фундаментальной системы функций $z_i\ (x),\ i = \overline{0, n-1}$ в точке x_0

$$\Delta(x_0) = \begin{vmatrix} z_1(x_0) & z_2(x_0) & \ldots & z_n(x_0) \\ z_1'(x_0) & z_2'(x_0) & \ldots & z_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-1)}(x_0) & z_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & z_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (6_0)$$

Вычислив значения постоянных c_{i0} в системе (5_0) и подставив их в выражение $g(x)$ в уравнении (10), придем к разрешающему интегральному уравнению специального вида

$$F(x) + \lambda \int_a^b \left[g_0(y) + \int_{x_0}^{x} \frac{H(\eta, y)}{\Delta(\eta)} F(\eta) d\eta \right] K(x, y) dy = 0, \qquad (10_0)$$

где $g_0(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{io} P_m[z_i(y)],\ H(\eta, y)$ и $\Delta(\eta)$ те же, что и в формуле (10).

Для нахождения характеристического полинома $D(\lambda)$ и первого минорного ряда $D\begin{pmatrix} x \\ & \lambda \\ y \end{pmatrix}$ при решении уравнения (10), учитывая начальные условия, получим формулы

$$D_0(\lambda) = 1 +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda^p}{p!} \int_a^b \ldots \int_a^b dy_1 \ldots dy_p \int_{x_0}^{y_1} \ldots \int_{x_0}^{y_p} \frac{H(x_1, y_1) \ldots H(x_p, y_p)}{\Delta(x_1) \ldots \Delta(x_p)} K\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_p \\ y_1 & \ldots & y_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p,$$

$$(21_0^*)$$

$$D_0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda = K(x,y) + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\lambda^p}{p!}\int_a^b \ldots \int_a^b dy_1 \ldots dy_p \int_{x_0}^{y_1} \ldots \int_{x_0}^{y_p} \frac{H(x_1,y_1)\ldots H(x_p,y_p)}{\Delta(x_1)\ldots\Delta(x_p)} \times$$

$$\times K\begin{pmatrix} x & x_1 & \ldots & x_p \\ y & y_1 & \ldots & y_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p \,. \qquad (25^*_{10})$$

Решение уравнения (10), а затем и (1), при заданных начальных условиях, найдем по формулам:

$$F(x) = -\frac{\lambda}{D_0(\lambda)}\int_a^b D_0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda\, g_0(y)dy, \qquad (22_0)$$

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i(x)\left[c_{io} + \int_{x_0}^{x}\frac{\Delta_i(\eta)}{\Delta(\eta)}F(\eta)d\eta\right]. \qquad (9_0)$$

Пример 3. Найти решение задачи Коши и определить характеристические числа.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2z}{dx^2} - \dfrac{dz}{dx} - 6z + \lambda\displaystyle\int_0^1 z(y)dy = 0, \\ x_0 = 0, \quad z(0) = 1, \;\; z'(0) = 0. \end{cases}$$

$K(x,y) = 1$, $P_m[z(y)] = z(y)$, $a = 0$, $b = 1$. $z'' - z' - 6z = 0$, $k^2 - k - 6 = 0$, $k_1 = 3$, $k_2 = -2$, $z_1(x) = e^{3x}$, $z_2(x) = e^{-2x}$, $\Delta(x) = -5e^x$, $\Delta_1(x) = -e^{-2x}$, $\Delta_2(x) = e^{3x}$.

$$z(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{5}\int_0^x (e^{-3\eta}e^{3x} - e^{2\eta}e^{-2x})F(\eta)d\eta\,.$$

Здесь использованы результаты вычислений примера 1. Далее, положив $x_0 = 0$, найдем постоянные c_{10} и c_{20}, записав систему (5_0)

$$\begin{cases} c_{10} + c_{20} = 1, \\ 3c_{10} - 2c_{20} = 0 \end{cases}, \text{ откуда находим } c_{10} = \frac{2}{5},\; c_{20} = \frac{3}{5} \text{ и}$$

$$g_0(y) = \frac{2}{5}e^{3y} + \frac{3}{5}e^{-2y}, \quad H(\eta, y) = e^{3\eta}e^{-2y} - e^{-2\eta}e^{3y}\,.$$

Разрешающее уравнение (10_0) запишется

$$F(x)+\lambda\int_0^1\left[\frac{2}{5}e^{3y}+\frac{3}{5}e^{-2y}+\frac{1}{5}\int_0^y(e^{-3\eta}e^{3y}-e^{2\eta}e^{-2y})F(\eta)d\eta\right]=0 .$$

Вычислим теперь по формулам (21_0^*) и (25_{10}^*) значения $D_0(\lambda)$и $D_0\begin{pmatrix} x \\ & \lambda \\ y \end{pmatrix}$. Так как определители второго и высших порядков для данной задачи равны нулю, то имеем

$$D_0(\lambda)=1+\lambda\int_0^1 dy_1\int_0^{y_1}\frac{(e^{3x_1}e^{-2y_1}-e^{2x_1}e^{3y_1})}{-5e^{x_1}}dx_1=1+\frac{\lambda}{5}\left(-\frac{5}{6}+\frac{4e^5+5e^2-9}{36e^2}\right),$$

$$D_0\begin{pmatrix} x \\ & \lambda \\ y \end{pmatrix}=1 .$$

По формулам (22_0) и (9_0) находим

$$F(x)=-\frac{\lambda}{1-\dfrac{\lambda}{6}+\dfrac{\lambda}{180}(4e^3+5-9e^{-2})}\cdot\frac{1}{5}\int_0^1(2e^{3y}+3e^{-2y})dy,$$

$$z(x)=-\frac{6(6-\lambda)(2e^{3x}+3e^{-2x})}{30(6-\lambda)+\lambda(4e^3+5-9e^{-2})}+\frac{\lambda(4e^3+5-9e^{-2})}{30(6-\lambda)+\lambda(4e^3+5-9e^{-2})}.$$

Приравняв нулю $D_0(\lambda)$, найдем характеристическое число

$$\lambda_0=\frac{180}{30-(4e^3+5-9e^{-2})} .$$

Задание. Сравнить с характеристическим числом общего решения (пример 1) и сделать соответствующий вывод.

§2. Аналог второй теоремы Фредгольма

1. Минорные ряды высших порядков

Назовем минорными рядами высших порядков следующие ряды

$$D\begin{pmatrix} x_1 \dots x_r & \\ y_1 \dots y_r & \end{pmatrix}\lambda = K\begin{pmatrix} x_1 \dots x_r \\ y_1 \dots y_r \end{pmatrix} +$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda^p}{p!} \int_a^b \dots \int_a^b dy_{r+1} \dots dy_{r+p} \int^{y_{r+1}} \dots \int^{y_{r+p}} \frac{H(x_{r+1}, y_{r+1}) \dots H(x_{r+p}, y_{r+p})}{\Delta(x_{r+1}) \dots \Delta(x_{r+p})} \cdot$$

$$\cdot K\begin{pmatrix} x_1 \dots x_{r+p} \\ y_1 \dots y_{r+p} \end{pmatrix} dx_{r+1} \dots dx_{r+p}, \quad r = 1, 2, \dots . \qquad (25_r)$$

Докажем сходимость минорных рядов высших порядков при следующих ограничениях $a \le x,\ y \le b,\ |K(x,y)| \le A,\ \left|\frac{H(x,y)}{\Delta(x)}\right| \le M$. Тогда, в соответствии с неравенством Адамара

$$\left| K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{r+p} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{r+p} \end{pmatrix} \right| \le A^{r+p} \sqrt{(r+p)^{r+p}} ,$$

для членов рядов (25_r^*) получим ограничения

$$\left| \frac{\lambda^p}{p!} \int_a^b \dots \int_a^b dy_{r+1} \dots dy_{r+p} \int^{y_{r+1}} \dots \int^{y_{r+p}} \frac{H(x_{r+1}, y_{r+1}) \dots H(x_{r+p}, y_{r+p})}{\Delta(x_{r+1}) \dots \Delta(x_{r+p})} \times \right.$$

$$\left. \times K\begin{pmatrix} x_1 \dots x_{r+p} \\ y_1 \dots y_{r+p} \end{pmatrix} dx_{r+1} \dots dx_{r+p} \right| \le \frac{|\lambda|^p M^p A^{r+p} \sqrt{(r+p)^{r+p}} \left|b^2 - a^2\right|^p}{p!\ 2^p} = u_p .$$

По признаку Даламбера ряд $\sum_{p=0}^{\infty} u_p$, где $u_0 \le A^r \sqrt{r^r}$, сходится, так

как $\quad \ell = \lim_{p\to\infty} \frac{u_{p+1}}{u_p} =$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{|\lambda|^{p+1} M^{p+1} A^{p+r+1} \sqrt{(r+p+1)^{r+p+1}} \left|b^2-a^2\right|^{p+1} p!\ 2^p}{(p+1)!\cdot 2^{p+1} |\lambda|^p M^p A^{p+r} \sqrt{(r+p)^{r+p}} \left|b^2-a^2\right|^p} = 0 < 1.$$

Аналогичный предел уже рассматривался при доказательстве сходимости ряда $D(\lambda)$ (21*) в пункте 4. Следовательно, ряды (25_r^*) по критерию Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно.

2. *Связь между минорными рядами разрешающего интегрального уравнения специального вида*

Получим зависимость между минорными рядами разложением входящих в них определителей по элементам строк и столбцов. Начнем с минорного ряда второго порядка $D\begin{pmatrix} x_1\, x_2 \\ y_1\, y_2 \end{pmatrix}\lambda$ в формуле (25_r) при r =2 (для минорного ряда первого порядка проделать самостоятельно), разложив его определители по элементам первой строки:

$$D\begin{pmatrix} x_1\, x_2 \\ y_1\, y_2 \end{pmatrix}\lambda = \begin{vmatrix} K(x_1,y_1) & K(x_1,y_2) \\ K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) \end{vmatrix} +$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda^p}{p!} \int_a^b \ldots \int_a^b dy_3 \ldots dy_{p+2} \int^{y_3} \ldots \int^{y_{p+2}} \frac{H(x_3,y_3)\ldots H(x_{p+2},y_{p+2})}{\Delta(x_3)\ldots\Delta(x_{p+2})} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} K(x_1,y_1) & \ldots & \ldots & K(x_1,y_{p+2}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(x_{p+2},y_1) & \ldots & \ldots & K(x_{p+2},y_{p+2}) \end{vmatrix} dx_3 \ldots dx_{p+2} =$$

$$= K(x_1,y_1)K(x_2,y_2) - K(x_1,y_2)K(x_2,y_1) + \lambda \int_a^b dy_3 \int^{y_3} \frac{H(x_3,y_3)}{\Delta(x_3)} \times$$

$$\times \left[K(x_1,y_1) \begin{vmatrix} K(x_2,y_2) & K(x_2,y_3) \\ K(x_3,y_2) & K(x_3,y_3) \end{vmatrix} - K(x_1,y_2) \begin{vmatrix} K(x_2,y_1) & K(x_2,y_3) \\ K(x_3,y_1) & K(x_3,y_3) \end{vmatrix} + \right.$$

$$+K(x_1,y_3)\begin{vmatrix} K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) \\ K(x_3,y_1) & K(x_3,y_2) \end{vmatrix}\Bigg]dx_3 +$$

$$+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b dy_3 dy_4 \int^{y_3}\int^{y_4} \frac{H(x_3,y_3)H(x_4,y_4)}{\Delta(x_3)\Delta(x_4)}\times$$

$$\times\Bigg[K(x_1,y_1)\begin{vmatrix} K(x_2,y_2) & K(x_2,y_3) & K(x_2,y_4) \\ K(x_3,y_2) & K(x_3,y_3) & K(x_3,y_4) \\ K(x_4,y_2) & K(x_4,y_3) & K(x_4,y_4) \end{vmatrix} -$$

$$-K(x_1,y_2)\begin{vmatrix} K(x_2,y_1) & K(x_2,y_3) & K(x_2,y_4) \\ K(x_3,y_1) & K(x_3,y_3) & K(x_3,y_4) \\ K(x_4,y_1) & K(x_4,y_3) & K(x_4,y_4) \end{vmatrix} +$$

$$+K(x_1,y_3)\begin{vmatrix} K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) & K(x_2,y_4) \\ K(x_3,y_1) & K(x_3,y_2) & K(x_3,y_4) \\ K(x_4,y_1) & K(x_4,y_2) & K(x_4,y_4) \end{vmatrix} -$$

$$-K(x_1,y_4)\begin{vmatrix} K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) & K(x_2,y_3) \\ K(x_3,y_1) & K(x_3,y_2) & K(x_3,y_3) \\ K(x_4,y_1) & K(x_4,y_2) & K(x_4,y_3) \end{vmatrix}\Bigg] dx_3 dx_4 + \dots\,.$$

Сгруппировав члены, содержащие множители $K(x_1,y_1)$ и $K(x_1,y_2)$, и вынося общий множитель за скобки, в скобках в соответствии с выражением (25_1) получим разложения $D\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\lambda$ и $D\begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \end{pmatrix}\lambda$:

$$D\begin{pmatrix} x_1\ x_2 \\ y_1\ y_2 \end{pmatrix}\lambda = K(x_1,y_1)D\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\lambda - K(x_1,y_2)D\begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \end{pmatrix}\lambda +$$

$$+\lambda\int_a^b dy_3 \int^{y_3} \frac{H(x_3,y_3)}{\Delta(x_3)} K(x_1,y_3)\begin{vmatrix} K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) \\ K(x_3,y_1) & K(x_3,y_2) \end{vmatrix} +$$

$$+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b dy_3 dy_4 \int^{y_3}\int^{y_4} \frac{H(x_3,y_3)H(x_4,y_4)}{\Delta(x_3)\Delta(x_4)} K(x_1,y_3)\times$$

$$\times\begin{vmatrix} K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) & K(x_2,y_4) \\ K(x_3,y_1) & K(x_3,y_2) & K(x_3,y_4) \\ K(x_4,y_1) & K(x_4,y_2) & K(x_4,y_4) \end{vmatrix} dx_3 dx_4 -$$

$$-\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b dy_3 dy_4 \int^{y_3}\int^{y_4} \cdot \frac{H(x_3,y_3)H(x_4,y_4)}{\Delta(x_3)\Delta(x_4)} K(x_1,y_4)\times$$

$$\times\begin{vmatrix} K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) & K(x_2,y_3) \\ K(x_3,y_1) & K(x_3,y_2) & K(x_3,y_3) \\ K(x_4,y_1) & K(x_4,y_2) & K(x_4,y_3) \end{vmatrix} dx_3 dx_4 + \ldots$$

Далее, для симметричной записи, переставим строки в определителях, сменив затем x_3 на x_4, y_3 на y_4 и наоборот x_4 на x_3 и y_4 на y_3 и т.д. в выражениях с отрицательными знаками

$$D\begin{pmatrix} x_1\ x_2 & \lambda \\ y_1\ y_2 & \end{pmatrix} = K(x_1,y_1)D\begin{pmatrix} x_2 & \lambda \\ y_2 & \end{pmatrix} - K(x_1,y_2)D\begin{pmatrix} x_2 & \lambda \\ y_1 & \end{pmatrix} -$$

$$-\lambda\int_a^b dy_3 \int^{y_3} \frac{H(x_3,y_3)}{\Delta(x_3)} K(x_1,y_3)\left[\begin{vmatrix} K(x_3,y_1) & K(x_3,y_2) \\ K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) \end{vmatrix} +\right.$$

$$+\lambda\int_a^b dy_4 \int^{y_4} \frac{H(x_4,y_4)}{\Delta(x_4)} K(x_1,y_4)\times$$

$$\left.\times\begin{vmatrix} K(x_3,y_1) & K(x_3,y_2) & K(x_3,y_3) \\ K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) & K(x_2,y_3) \\ K(x_4,y_1) & K(x_4,y_2) & K(x_4,y_3) \end{vmatrix} dx_4 + \ldots \right] dx_3 + \ldots$$

Нетрудно увидеть, что в соответствии с формулой ($25_г$) в квадратных скобках получили фредгольмовский минорный ряд $D\begin{pmatrix} x_3\, x_2 & \lambda \\ y_1\, y_2 & \end{pmatrix}$. Следовательно, заменив x_3 на η, y_3 на y, получим

$$D\begin{pmatrix} x_1 \; x_2 & \lambda \\ y_1 \; y_2 & \end{pmatrix} = K(x_1, y_1) D\begin{pmatrix} x_2 & \lambda \\ y_2 & \end{pmatrix} - K(x_1, y_2) D\begin{pmatrix} x_2 & \lambda \\ y_1 & \end{pmatrix} -$$
$$- \lambda \int_a^b dy \int^y \frac{H(\eta, y)}{\Delta(\eta)} K(x_1, y) D\begin{pmatrix} \eta \; x_2 & \lambda \\ y_1 \; y_2 & \end{pmatrix} d\eta. \tag{30_2}$$

Разложим пятый минор по элементам третьей строки (самостоятельно), используя обозначения в (21*). Тогда ряд (25_5) перепишется

$$D\begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5 & \lambda \\ y_1\, y_2\, y_3\, y_4\, y_5 & \end{pmatrix} = (-1)^{3+1} K(x_1, y_1) D\begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_4\, x_5 & \lambda \\ y_2\, y_3\, y_4\, y_5 & \end{pmatrix} +$$
$$+ (-1)^{3+2} K(x_1, y_2) D\begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_4\, x_5 & \lambda \\ y_1\, y_3\, y_4\, y_5 & \end{pmatrix} +$$
$$+ (-1)^{3+3} K(x_1, y_3) D\begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_4\, x_5 & \lambda \\ y_1\, y_2\, y_4\, y_5 & \end{pmatrix} +$$
$$+ (-1)^{3+4} K(x_1, y_4) D\begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_4\, x_5 & \lambda \\ y_1\, y_2\, y_3\, y_5 & \end{pmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+5} K(x_1, y_5) D\begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_4\, x_5 & \lambda \\ y_1\, y_2\, y_3\, y_4 & \end{pmatrix} -$$
$$- \lambda \int_a^b K(x, y) dy \int^y \frac{H(\eta, y)}{\Delta(\eta)} D\begin{pmatrix} x_1\, x_2\; \eta\; x_4\, x_5 & \lambda \\ y_1\, y_2\, y_3\, y_4\, y_5 & \end{pmatrix} d\eta$$

или

$$D\begin{pmatrix} x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5 \\ y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5 \end{pmatrix}\lambda = \sum_{\beta=1}^{5}(-1)^{3+\beta}K(x_3,y_\beta)D\begin{pmatrix} x_1\ \ x_2\ \ \ x_4\ \ x_5 \\ y_1\ y_{\beta-1}\ y_{\beta+1}\ y_5 \end{pmatrix}\lambda -$$

$$-\lambda\int_a^b K(x_3,y)dy\int^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}D\begin{pmatrix} x_1\ x_2\ \eta\ x_4\ x_5 \\ y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5 \end{pmatrix}\lambda\, d\eta.$$

(30_5)

Аналогично получим формулу для разложения r – минора по α–й строке

$$D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_{\alpha-1}\ x_\alpha\ x_{\alpha+1} \ldots x_r \\ y_1 \ldots y_{\alpha-1}\ y_\alpha\ y_{\alpha+1} \ldots y_r \end{pmatrix}\lambda =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{r}(-1)^{\alpha+\beta}K(x_\alpha,y_\beta)D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_{\alpha-1}\ \ x_{\alpha+1} \ldots x_r \\ y_1 \ldots y_{\beta-1}\ \ y_{\beta+1} \ldots y_r \end{pmatrix}\lambda -$$

$$-\lambda\int_a^b K(x_\alpha,y)dy\int^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_{\alpha-1}\ \eta\ x_{\alpha+1} \ldots x_r \\ y_1 \ldots y_{\alpha-1}\ y_\alpha\ y_{\alpha+1} \ldots y_r \end{pmatrix}\lambda\, d\eta.$$

(30_r)

Также аналогично можно получить формулу для разложения r – минора по β -му столбцу

$$D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_{\beta-1}\ x_\beta\ x_{\beta+1} \ldots x_r \\ y_1 \ldots y_{\beta-1}\ y_\beta\ y_{\beta+1} \ldots y_r \end{pmatrix}\lambda =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha+\beta}K(x_\alpha,y_\beta)D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_{\alpha-1}\ x_{\alpha+1} \ldots x_r \\ y_1 \ldots y_{\beta-1}\ y_{\beta+1} \ldots y_r \end{pmatrix}\lambda -$$

$$-\lambda\int_a^b\int^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}K(\eta,y_\beta)D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_{\beta-1}\ x_\beta\ x_{\beta+1} \ldots x_r \\ y_1 \ldots y_{\beta-1}\ y\ \ y_{\beta+1} \ldots y_r \end{pmatrix}\lambda\, dyd\eta. \qquad (31_r)$$

3. Построение фундаментальных функций однородного уравнения, соответствующего неоднородному разрешающему интегральному уравнению

Выпишем однородное интегральное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению специального вида (10)

$$F(x)+\lambda\int_a^b dy\int^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}K(x,y)F(\eta)d\eta=0. \qquad (32)$$

При нахождении фундаментальных функций уравнения (32) нам потребуются производные $D(\lambda)$, найдем их

$$D(\lambda)=1+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\lambda^p}{p!}\int_a^b\ldots\int_a^b dy_1\ldots dy_p\int^{y_1}\ldots\int^{y_p}\frac{H(x_1,y_1)\ldots H(x_p,y_p)}{\Delta(x_1)\ldots\Delta(x_p)}K\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_p\\ y_1 & \ldots & y_p\end{pmatrix}dx_1\ldots dx_p, \quad (21^*)$$

$$D'(\lambda)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\lambda^{p-1}}{(p-1)!}\int_a^b\ldots\int_a^b dy_1\ldots dy_p\int^{y_1}\ldots\int^{y_p}\frac{H(x_1,y_1)\ldots H(x_p,y_p)}{\Delta(x_1)\ldots\Delta(x_p)}\times$$

$$\times K\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_p\\ y_1 & \ldots & y_p\end{pmatrix}dx_1\ldots dx_p=$$

$$=\int_a^b .dy_1\int^{y_1}\frac{H(x_1,y_1)}{\Delta(x_1)}\Big[K(x_1,y_1)+$$

$$+\sum_{p=2}^{\infty}\frac{\lambda^{p-1}}{(p-1)!}\int_a^b\ldots\int_a^b dy_2\ldots dy_p\int^{y_2}\ldots\int^{y_p}\frac{H(x_2,y_2)\ldots H(x_p,y_p)}{\Delta(x_2)\ldots\Delta(x_p)}\times$$

$$\times\begin{vmatrix}K(x_1,y_1) & \ldots & K(x_1,y_p)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ K(x_p,y_1) & \ldots & K(x_p,y_p)\end{vmatrix}dx_2\ldots dx_p\Bigg]dx_1.$$

В квадратных скобках в соответствии с формулой (25_1) имеем $D\begin{pmatrix}x_1 & \lambda\\ y_1 & \end{pmatrix}$ и, следовательно,

$$D'(\lambda)=\int_a^b dy_1\int^{y_1}\frac{H(x_1,y_1)}{\Delta(x_1)}D\begin{pmatrix}x_1 & \lambda\\ y_1 & \end{pmatrix}dx_1. \qquad (33_1)$$

Аналогично найдем

$$D''(\lambda)=\int_a^b\int_a^b dy_1dy_2\int^{y_1}\int^{y_2}\frac{H(x_1,y_1)H(x_2,y_2)}{\Delta(x_1)\Delta(x_2)}D\begin{pmatrix}x_1\ x_2\\ y_1\ y_2\end{pmatrix}\lambda\, dx_1dx_2\ , \qquad (33_2)$$

… … … … … … … … … … … … … … … …

$$D^{(m)}(\lambda)=$$

$$=\int_a^b...\int_a^b dy_1...dy_m\int^{y_1}...\int^{y_m}\frac{H(x_1,y_1)...H(x_m,y_m)}{\Delta(x_1)...\Delta(x_m)}D\begin{pmatrix}x_1\ ...\ x_m\\ y_1\ ...\ y_m\end{pmatrix}\lambda\, dx_1...dx_m. \qquad (33_m)$$

Пусть $\lambda=\lambda^*$ является корнем характеристического уравнения $D(\lambda)=0$, кратности p, тогда $D(\lambda^*)=0$, $D'(\lambda^*)=0$, … $D^{(p-1)}(\lambda^*)=0$, а $D^{(p)}(\lambda^*)\neq0$. Положим $m=\overline{1,p-1}$, в формулах (33_m), тогда $D\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}\lambda^*=0$, $D\begin{pmatrix}x_1\ x_2\\ y_1\ y_2\end{pmatrix}\lambda^*=0$, …, $D\begin{pmatrix}x_1\ ...\ x_{p-1}\\ y_1\ ...\ y_{p-1}\end{pmatrix}\lambda^*=0$, $D\begin{pmatrix}x_1\ ...\ x_p\\ y_1\ ...\ y_p\end{pmatrix}\lambda^*\neq0$.

Нетрудно увидеть, что и обратно, при $D\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}\lambda^*=0$, $D\begin{pmatrix}x_1\ x_2\\ y_1\ y_2\end{pmatrix}\lambda^*=0$,…, $D\begin{pmatrix}x_1\ ...\ x_{q-1}\\ y_1\ ...\ y_{q-1}\end{pmatrix}\lambda^*=0$, $D\begin{pmatrix}x_1\ ...\ x_q\\ y_1\ ...\ y_q\end{pmatrix}\lambda^*\neq0$, из тех же формул следует, что $D'(\lambda^*)=0$, $D''(\lambda^*)=0$, …, $D^{(q-1)}(\lambda^*)=0$, а $D^{(q)}(\lambda^*)\neq 0$, т.е. λ^* является корнем уравнения $D(\lambda)=0$ кратности $q\leq p$.

Определение. Рангом характеристического числа назовем порядок первого минора высшего порядка тождественно не равного нулю.

В рассматриваемом выше случае ранг характеристического числа λ^* равен $q\leq p$.

Предположим теперь, что $\lambda=\lambda^*$ – характеристическое число ранга $r=q$. Возьмем разложение минора q-го порядка по строке α и положим в нем

$$x_1=\overset{*}{x_1},...,x_{\alpha-1}=\overset{*}{x}_{\alpha-1},x_\alpha=x,\ x_{\alpha+1}=\overset{*}{x}_{\alpha+1},x_q=\overset{*}{x_q},$$

$$y_1=\overset{*}{y_1},..,y_\alpha=\overset{*}{y_\alpha},...,y_q=\overset{*}{y_q},$$

где x_i^* и y_i^* – любые числа, но такие, чтобы минор q-го порядка тождественно не равнялся нулю.

Тогда в выражении минора в форме (30_r) при r=q слагаемые в сумме исчезнут, т.е. получим

$$D\begin{pmatrix} x_1^* \ldots x_{\alpha-1}^* \; x \; x_{\alpha+1}^* \ldots x_q^* \\ y_1^* \ldots y_{\alpha-1}^* \; y_\alpha^* \; y_{\alpha+1}^* \ldots y_q^* \end{pmatrix} \lambda * =$$

$$= -\lambda \int_a^b K(x,y)dy \int^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)} D\begin{pmatrix} x_1^* \ldots x_{\alpha-1}^* \; \eta \; x_{\alpha+1}^* \ldots x_q^* \\ y_1^* \ldots y_{\alpha-1}^* \; y_\alpha^* \; y_{\alpha+1}^* \ldots y_q^* \end{pmatrix} \lambda * \, d\eta.$$

И за решение однородного интегрального уравнения (32) можно взять функцию

$$F(x) = D\begin{pmatrix} x_1^* \ldots x_{\alpha-1}^* \; x \; x_{\alpha+1}^* \ldots x_q^* \\ y_1^* \ldots y_{\alpha-1}^* \; y_\alpha^* \; y_{\alpha+1}^* \ldots y_q^* \end{pmatrix} \lambda *,$$

где $\alpha = \overline{1,q}$, т.е. имеем q различных решений. Поделим полученные решения на

$D\begin{pmatrix} x_1^* \ldots x_{\alpha-1}^* \; x_\alpha^* \; x_{\alpha+1}^* \ldots x_q^* \\ y_1^* \ldots y_{\alpha-1}^* \; y_\alpha^* \; y_{\alpha+1}^* \ldots y_q^* \end{pmatrix} \lambda * \neq 0$ и поскольку уравнение (32) – однородное, то функции

$$F_\alpha(x) = \frac{D\begin{pmatrix} x_1^* \ldots x_{\alpha-1}^* \; x \; x_{\alpha+1}^* \ldots x_q^* \\ y_1^* \ldots y_{\alpha-1}^* \; y_\alpha^* \; y_{\alpha+1}^* \ldots y_q^* \end{pmatrix} \lambda *}{D\begin{pmatrix} x_1^* \ldots x_{\alpha-1}^* \; x_\alpha^* \; x_{\alpha+1}^* \ldots x_q^* \\ y_1^* \ldots y_{\alpha-1}^* \; y_\alpha^* \; y_{\alpha+1}^* \ldots y_q^* \end{pmatrix} \lambda *}, \qquad (34)$$

где $\alpha = \overline{1,q}$, также являются его решениями.

Определение. Функции $F_\alpha(x)$ в формуле (34) назовем фундаментальными функциями характеристического числа λ*.

Из формул (34) следуют два очень важных свойства фундаментальных функций:

$$1)\ F_\alpha(x_\alpha^*) = 1, \quad 2)\ F_\alpha(x_\beta^*) = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta, \qquad (35)$$

так как в первом случае числитель равен знаменателю, а во втором в числителе появятся две одинаковых строки.

4. Линейная независимость и полнота решений системы фундаментальных функций. Аналог второй теоремы Фредгольма

Сначала докажем линейную независимость фундаментальных функций (34), используя свойства (35) и метод от противного. Предположим, что

$$C_1F_1(x)+C_2F_2(x)+...+C_\alpha F_\alpha(x)+...+C_qF_q(x)\equiv 0,$$

где не все C_i равны нулю. Так как последнее равенство должно выполняться тождественно, то положив $x=x_\alpha^*$ в силу второго свойства в (35), получим $C_\alpha F_\alpha(x_\alpha^*)=0$, следовательно, в силу первого свойства $C_\alpha=0$, но $\alpha=\overline{1,q}$, т.е. все $C_\alpha=0$ и, следовательно, линейная независимость доказана.

Докажем теперь полноту решений, т.е. покажем, что любое другое решение соответствующее характеристическому числу λ*, выражается линейно и однородно через фундаментальные функции.

Предположим, что функция $u(x)$ – еще одно решение однородного уравнения (32), соответствующая характеристическому числу λ*, тогда имеет место следующее тождество

$$u(x)+\lambda^*\int_a^b\int^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}K(x,y)u(\eta)dyd\eta\equiv 0. \qquad (36)$$

Введем пока неопределенную, но непрерывную функцию $Q(x,t)$ и запишем следующее тождество

$$\lambda^*\int_a^b Q(x,t)dt\int^t \frac{H(s,t)}{\Delta(t)}\left[u(s)+\lambda^*\int_a^b\int^{t_1}\frac{H(\eta_1,t_1)}{\Delta(\eta_1)}K(s,t_1)u(\eta_1)d\eta_1dt_1\right]ds\equiv 0.$$

(37)

Затем, сменив в (36) η на η_1, y на t_1, вычтем из тождества (36) тождество (37) и, объединяя сумму интегралов в один, сменив во втором слагаемом s на η_1, t на t_1, получим

$$u(x)+\lambda*\int_a^b dt_1\int^{t_1}\frac{H(\eta_1,t_1)}{\Delta(\eta_1)}\times$$

$$\times\left[K(x,t_1)-Q(x,t_1)-\lambda*\int_a^b dt\int^{t}\frac{H(s,t)}{\Delta(s)}Q(x,t)K(s,t_1)ds\right]u(\eta_1)d\eta_1\equiv 0.$$

Неизвестное выражение в квадратных скобках обозначим через $N(x,\, t_1)$:

$$N(x,t_1)=K(x,t_1)-Q(x,t_1)-\lambda*\int_a^b Q(x,t)dt\int^{t}\frac{H(s,t)K(s,t_1)}{\Delta(s)}ds\,;$$

тогда

$$u(x)+\lambda*\int_a^b dt_1\int^{t_1}\frac{H(\eta_1,t_1)}{\Delta(\eta_1)}N(x,t_1)u(\eta_1)d\eta_1\equiv 0\,. \qquad (37^*)$$

Далее выпишем разложение (q+1)-го минора по s-м столбцам входящих в него определителей в соответствии с (31_r). Сначала рассмотрим частный случай (самостоятельно)

$$D\begin{pmatrix} x\ \ x_1\, x_2\, x_3 \\ s\ \ y_1\, y_2\, y_3 \end{pmatrix}\lambda = (-1)^{1+1}K(x,s)D\begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_3 \\ y_1\, y_2\, y_3 \end{pmatrix}\lambda +$$

$$+(-1)^{2+1}K(x_1,s\ \ )D\begin{pmatrix} x\ \ x_2\, x_3 \\ y_1\, y_2\, y_3 \end{pmatrix}\lambda +$$

$$+(-1)^{3+1}K(x_2,s)D\begin{pmatrix} x\ \ x_1\, x_3 \\ y_1\, y_2\, y_3 \end{pmatrix}\lambda +(-1)^{4+1}K(x_3,s)D\begin{pmatrix} x\ \ x_1\, x_2 \\ y_1\, y_2\, y_3 \end{pmatrix}\lambda -$$

$$-\lambda\int_a^b dy\int^{y}\frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}K(\eta,s)D\begin{pmatrix} x\ \ x_1\, x_2\, x_3 \\ y\ \ y_1\, y_2\, y_3 \end{pmatrix}\lambda\, d\eta.$$

В полученном разложении, начиная со второго, сделаем все члены отрицательными, переставив строки, а минор $D\begin{pmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ заменим на равный ему $D\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\lambda$, то получим

$$D\begin{pmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ s & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\lambda = K(x,s)D\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\lambda - K(x_1,s)D\begin{pmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\lambda -$$

$$-K(x_2,s)D\begin{pmatrix} x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\lambda - K(x_3,s)D\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\lambda -$$

$$-\lambda\int_a^b dy \int^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)} K(\eta,s) D\begin{pmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\lambda\, d\eta.$$

Аналогично и в общем виде из разложения (31_r) при r=q+1 распишем

$$D\begin{pmatrix} x & x_1 \ldots x_q \\ s & y_1 \ldots y_q \end{pmatrix}\lambda = K(x,s)D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_q \\ y_1 \ldots y_q \end{pmatrix}\lambda - K(x_1,s)D\begin{pmatrix} x & x_2 \ldots x_q \\ y_1 & y_2 \ldots y_q \end{pmatrix}\lambda -$$

$$-K(x_2,s)D\begin{pmatrix} x_1 & x & x_3 \ldots x_q \\ y_1 & y_2 & \ldots\ldots y_q \end{pmatrix}\lambda - \ldots - K(x_q,s)D\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \ldots x_{q-1} & x \\ y_1 & y_2 \ldots & \ldots & y_q \end{pmatrix}\lambda -$$

$$-\lambda\int_a^b dy \int^y \frac{H(\eta, y)}{\Delta(\eta)} K(\eta,s) D\begin{pmatrix} x & x_1 \ldots x_q \\ y & y_1 \ldots y_q \end{pmatrix}\lambda\, d\eta. \qquad (31_{q+1})$$

В разложении минора (31_{q+1}) положим

$$x_1 = x_1^*, \ldots, x_2 = x_2^*, \ldots, x_q = x_q^*, s = t_1,$$

$$y_1 = y_1^*, y_2 = y_2^*, \ldots, y_q = y_q^*, \quad \lambda = \lambda *.$$

Числа, обозначенные под «*», выберем так, чтобы минор

$$D\begin{pmatrix} x_1^* \ldots x_q^* \\ y_1^* \ldots y_q^* \end{pmatrix}\lambda * \neq 0,$$

и затем на него поделим равенство (31_{q+1}):

$$\frac{D\begin{pmatrix} x & x_1^* \dots x_q^* \\ t_1 & y_1^* \dots y_q^* \end{pmatrix}\lambda *}{D\begin{pmatrix} x_1^* \dots x_q^* \\ y_1^* \dots y_q^* \end{pmatrix}\lambda *} = K(x,t_1) - K(x_1^*,t_1)\frac{D\begin{pmatrix} x & x_2^* \dots x_q^* \\ & y_1^* \dots\dots y_q^* \end{pmatrix}\lambda *}{D\begin{pmatrix} x_1^* \dots\dots x_q^* \\ y_1^* \dots\dots y_q^* \end{pmatrix}\lambda *} -$$

$$-\dots - K(x_q^*,t_1)\frac{D\begin{pmatrix} x_1^* \dots x_{q-1}^* x \\ y_1^* \dots y_{q-1}^* y_q^* \end{pmatrix}\lambda *}{D\begin{pmatrix} x_1^* \dots\dots x_q^* \\ y_1^* \dots\dots y_q^* \end{pmatrix}\lambda *} -$$

$$-\lambda * \int_a^b dy \int^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)} K(\eta,t_1)\frac{D\begin{pmatrix} x & x_1^* \dots x_q^* \\ y & y_1^* \dots y_q^* \end{pmatrix}\lambda *}{D\begin{pmatrix} x_1^* \dots x_q^* \\ y_1^* \dots y_q^* \end{pmatrix}\lambda *} d\eta.$$

В последнем равенстве дробь слева примем за $Q(x,t_1)$, а остальные дроби в соответствии с формулами (34) есть фундаментальные функции $F_\alpha(x)$

$$Q(x,t_1) = K(x,t_1) - \sum_{\alpha=1}^{q} K(x_\alpha^*,t_1)F_\alpha(x) -$$

$$-\lambda * \int_a^b dy \int^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)} K(\eta,t_1)Q(x,y)d\eta.$$

Из последнего равенства определим $\sum_{\alpha=1}^{q} K(x_\alpha^*,t_1)F_\alpha(x)$, сменив одновременно y на t и η на s:

$$\sum_{\alpha=1}^{q} K(x_\alpha^*,t_1)F_\alpha(x) = K(x,t_1) - Q(x,t_1) -$$

$$-\lambda * \int_a^b Q(x,t)dt \int^t \frac{H(s,t)K(s,t_1)}{\Delta(s)} ds = N(x,t_1),$$

– в соответствии с обозначением в тождестве (37*).

Подставим теперь полученное выражение для $N(x,t_1)$ в тождество (37*):

$$u(x)+\lambda^*\int_a^b dt_1\int^{t_1}\frac{H(\eta_1,t_1)}{\Delta(\eta_1)}\sum_{\alpha=1}^{q}K(x_\alpha^*,t_1)F_\alpha(x)u(\eta_1)d\eta_1\equiv 0$$

или

$$u(x)\equiv\sum_{\alpha=1}^{q}\left[-\lambda^*\int_a^b dt_1\int^{t_1}\frac{H(\eta_1,t_1)}{\Delta(\eta_1)}K(x_\alpha^*,t_1)u(\eta_1)d\eta_1\right]F_\alpha(x).$$

В последнем тождестве, в квадратных скобках, после вычисления интегралов получим постоянные числа, обозначим их через C_α, тогда

$$u(x)\equiv\sum_{\alpha=1}^{q}C_\alpha F_\alpha(x),$$

т.е. любое другое решение уравнения (32) выражается линейно и однородно через фундаментальные функции и, следовательно, полученная система фундаментальных функций полна.

Сформулируем теперь аналог второй теоремы Фредгольма.

Если $\lambda=\lambda^*$ есть корень уравнения $D(\lambda)=0$ ранга q, то однородное разрешающее интегральное уравнение (32) имеет q линейно независимых решений, соответствующих этому значению λ^* и определяемых формулами (34), а любое другое решение этого уравнения выражается через них линейно и однородно.

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$z''(x)-z(x)=\lambda x^2\int_0^1 z(t)dt$$

и фундаментальную систему функций разрешающего уравнения.

$$L_2[z(x)] = z''-z, \quad P[(z(x)] = z(t), \quad K(x,y) = -x^2,$$

$$z''\text{-}z=F(x), \quad z''\text{-}z=0, \quad k^2\text{-}1=0, \quad k_{1,2} = \pm 1,$$

$$z_1(x)= e^x, \quad z_2 = e^{-x}, \quad z(x)=c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)\, e^{-x} = 0, \\ c_1'(x)e^x - c_2'(x)\, e^{-x} = F(x), \end{cases} \qquad \Delta(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2,$$

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ 1 & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x}, \ \Delta_2(x) = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = e^x,$$

$$g(y) = c_1 e^y + c_2 e^{-y}, \quad H(\eta, y) = -e^{-\eta}e^y + e^{\eta}e^{-y},$$

$$F(x) - \lambda x^2 \int_0^1 \left[c_1 e^y + c_2 e^{-y} + \frac{1}{2}\int^y (e^{-\eta}e^y - e^{\eta}e^{-y}) F(\eta)\, d\eta \right] dy = 0.$$

Коэффициенты рядов (21*) и (25_1*)

$$D(\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} d_p \lambda^p, \quad D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\!\lambda\Big) = \sum_{p=0}^{\infty} d_p^*(x,y)\lambda^p$$

находим по формулам (28) и (29)

$$d_0 = 1, \ d_0^*(x,y) = -x^2, \ d_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 dy_1 \int^{y_1} (e^{-x}e^{y_1} + e^{x_1}e^{-y_1})(-x_1^2)\, dx_1 = \frac{7}{3},$$

$$d_1^*(x,y) = -\frac{7}{3}x^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 dy_1 \int^{y_1} (e^{-x_1}e^{y_1} + e^{x_1}e^{-y_1}) x^2 (-x_1^2)\, dx_1 = 0,$$

$d_2 = 0, \ d_2^*(x,y) = 0$ и т.д.

Следовательно,

$D(\lambda)=1+\frac{7}{3}\lambda,\quad D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda = -x^2,\quad R(x,y;\lambda)=\frac{-x^2}{1+\frac{7}{3}\lambda}$ и по формулам (22) и (9) определим

$$F(x)=-\lambda\int_0^1 (c_1e^y+c_2e^{-y})\frac{(-x^2)}{1+\frac{7}{3}\lambda}dy=\frac{\lambda x^2}{1+\frac{7}{3}\lambda}\left[c_1(e-1)+c_2(1-e^{-1})\right],$$

$$z(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}-e^x\int_0^x \frac{e^{-\eta}\lambda\eta^2\left[c_1(e-1)+c_2(1-e^{-1})\right]}{2(1+\frac{7}{3}\lambda)}d\eta+$$

$$+e^{-x}\int_0^x \frac{e^{\eta}\lambda\eta^2\left[c_1(e-1)+c_2(1-e^{-1})\right]}{2(1+\frac{7}{3}\lambda)}d\eta=$$

$$=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{3\lambda(x^2+2)}{3+7\lambda}\left[c_1(e-1)+c_2(1-e^{-1})\right].$$

Приравняв нулю $D(\lambda)$, найдем характеристическое число $\lambda^*=-\frac{3}{7}$, $D'(\lambda)=\frac{3}{7}\neq 0$, следовательно, ранг характеристического числа $q=1$ и $D\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}\lambda^* = -x^{*2}=-1$, $D\begin{pmatrix} x \\ y^* \end{pmatrix}\lambda^* = -x^2$, $F_1(x)=\frac{-x^2}{-1}=x^2$, т.е. фундаментальная система функций разрешающего уравнения состоит из одной функции

$$F_1(x)=x^2 \text{ и } F(x)=\mathrm{A}x^2.$$

5. Специализированная задача Коши

Рассмотрим начальную задачу для интегродифференциального уравнения (1) с начальными условиями

$$\begin{cases} L_n[z(x)] + \lambda \int\limits_a^b K(x,y) P_m[z(y)]dy = 0, \\ z(x_0) = z_0, z'(x_0) = z_0', \ldots, z^{(n-1)}(x_0) = z_0^{(n-1)}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $n>m$, $K(x,y)$ – вырожденное ядро. Пусть $K(x,y)=\varphi_1(x)\psi_1(y)$, тогда разрешающее уравнение (10) запишется

$$F(x) + \lambda\varphi_1(x)\int\limits_a^b \left[g_0(y) + \int\limits_{x_0}^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)} F(\eta)d\eta \right] \psi_1(y)dy = 0$$

или

$$F(x) + \lambda\varphi_1(x)\int\limits_a^b g_0(y)\psi_1(y)dy + \lambda\varphi_1(x)\int\limits_a^b \psi_1(y)dy \int\limits_{x_0}^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)} F(\eta)d\eta dy = 0,$$

где $g_0(y) = \sum\limits_{i=1}^n c_{io} P_m[z_i(y)],\ H(\eta,y) = \sum\limits_{i=1}^n \Delta_i(\eta) P_m[z_i(y)].$

Далее рассмотрим соответствующее однородное интегральное уравнение

$$F(x) + \lambda\varphi_1(x)\int\limits_a^b \psi_1(y)dy \int\limits_{x_0}^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)} F(\eta)d\eta = 0,$$

которое получим, если положить $\int\limits_a^b \sum\limits_{i=1}^n c_{io} P_m[z_i(y)]\psi_1(y)dy = 0.$

После вычисления интегралов $\int\limits_a^b P_m[z_i(y)]\psi_1(y)dy = \ell_i$ получим $\sum\limits_{i=1}^n c_{io}\ell_i = 0$, т.е. постоянные c_{io} в случае однородного уравнения линейно зависимы, и c_{no} можно выразить через остальные:

$$c_{no} = -\frac{1}{\ell_n}\sum_{i=1}^{n-1} c_{io}\ell_i .$$

$D_0(\lambda) = 1 + \lambda\int\limits_a^b dy_1 \int\limits_{x_0}^{y_1} \frac{H(x_1,y_1)}{\Delta(x_1)} K(x_1,y_1)dx_1$ в силу того, что

$$\begin{vmatrix} K(x_1,y_1) & K(x_1,y_2) \\ K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) \end{vmatrix} = 0,$$

так как
$$\begin{vmatrix} [\varphi_1(x_1)\psi_1(y_1)] & [\varphi_1(x_1)\psi_1(y_2)] \\ [\varphi_1(x_2)\psi_1(y_1)] & [\varphi_1(x_2)\psi_1(y_2)] \end{vmatrix} = 0.$$

Приравняв $D_0(\lambda)=0$, найдем характеристическое число λ^*, ранг которого $q=1$ и, следовательно, найдем одну фундаментальную функцию $F_1(x)$. Общее решение однородного уравнения будет $F(x)=A\, F_1(x)$, где A – произвольная постоянная.

Общее решение однородного уравнения (1) найдем по формуле (9_0)

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i(x)\left[c_{io} + \int_{x_0}^{x} \frac{\Delta_i(\eta)}{\Delta(\eta)} AF_1(\eta)d\eta\right],$$

где одна из постоянных c_{io} может быть определена через остальные, следовательно, чтобы при решении начальной задачи не возникло противоречия, достаточно задать (n-1) условий, при этом постоянная А останется неопределенной, т.е. нарушается единственность решения задачи Коши.

Пример 5. Найти решение специализированной задачи Коши.

$$\begin{cases} z''(x) - \lambda \int_{-1}^{1} x[z'(y) + z(y)]dy = 0, \\ z(0) = 2,\ z'(0) = ?. \end{cases}$$

$$z''(x) = F(x),\ K(x,y) = -x\ ,\ P_1(y) = z'(y) + z(y).$$

$$z''(x) = 0\ ,\ k^2 = 0,\ k_{1,2} = 0\ ,\ z_1(x)=1,\ z_2(x)=x,\ \ z(x) = c_1+c_2 x.$$

$$\begin{cases} c_1'(x) + x\, c_2'(x) = 0, \\ c_2'(x) = F(x), \end{cases} \qquad \Delta(\eta) = 1,\ \Delta_1(\eta) = -\eta\ ,\ \ \Delta_2(\eta) = 1,$$

$$c_1(x) = -\int_0^x \eta F(\eta)d\eta + c_{10}, \quad c_2(x) = \int_0^x F(\eta)d\eta + c_{20}.$$

$$g_0(y) = c_{10} + c_{20}(1+y), \; H(\eta, y) = -\eta + 1 + y,$$

$$D_0(\lambda) = 1 - \lambda \int_{-1}^{1} dy_1 \int_0^{y_1} (-x_1 + 1 + y_1)x_1 dx_1 = 1 - \frac{\lambda}{3}.$$

Характеристическое число λ*=3 и уравнение (10) запишется

$$F(x) - 3\int_{-1}^{1}\left[c_{10} + c_{20}(1+y) + \int_0^y (-\eta + 1 + y)F(\eta)d\eta\right]xdy = 0.$$

Выписав условие однородности $\int_{-1}^{1}[c_{10} + c_{20}(1+y)]dy = 0$, найдем $c_{10} + c_{20} = 0$ или $c_{20} = -c_{10}$. Однородное уравнение будет

$$F(x) - 3\int_{-1}^{1} dy \int_0^y (-\eta + 1 + y)xF(\eta)d\eta = 0.$$

Откуда найдем $F_1(x) = -x$ и общее решение однородного уравнения запишется $F(x) = -Ax$. Далее можем найти решение специализированной задачи, сначала определив $c_{10}=2$ и $c_{20}=-2$,

$$z(x) = 2(1-x) - \frac{A}{6}x^3.$$

§3. Аналог третьей теоремы Фредгольма

1. Связь между детерминантными рядами двух разрешающих интегральных уравнений

Ранее мы получили для интегродифференциального уравнения (1) два разрешающих интегральных уравнения: специального вида

(10), с ядром $\dfrac{H(\eta, y)K(x, y)}{\Delta(\eta)}$ и уравнение Фредгольма (20), с ядром $M(x,y)$. Установим связь между ними. В соответствии с теорией Фредгольма выпишем детерминантные ряды первого и высших порядков уравнения (20), которые обозначим через $G\begin{pmatrix} x_1\ \tilde{o}_2 \ldots x_r \\ \acute{o}_1\ \acute{o}_2 \ldots \acute{o}_r \end{pmatrix} \lambda$:

$$G\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_r \\ \acute{o}_1 \ldots \acute{o}_r \end{pmatrix} \lambda = \lambda^{r-1} M\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_r \\ \acute{o}_1 \ldots \acute{o}_r \end{pmatrix} +$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \lambda^{i+r-1}}{i!} \int_a^b \ldots \int_a^b M\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_r\ t_1 \ldots t_i \\ \acute{o}_1 \ldots \acute{o}_r\ t_1 \ldots t_i \end{pmatrix} dt_1 \ldots dt_i\ . \qquad (38_r)$$

Распишем теперь выражение детерминантов в соответствии с обозначениями ядра $M(x, y)$ в уравнении (20)

$$M\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} M(x_{1,}y_1) & M(x_{1,}y_2) \\ M(x_{2,}y_1) & M(x_{2,}y_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\int^{x_1} \dfrac{\acute{I}\ (\eta_1, x_1)K(\eta_1, y_1)}{\Delta(\eta_1)} d\eta_1 & -\int^{x_1} \dfrac{\acute{I}\ (\eta_1, x_1)K(\eta_1, y_2)}{\Delta(\eta_1)} d\eta_1 \\ -\int^{x_2} \dfrac{\acute{I}\ (\eta_2, x_2)K(\eta_2, y_1)}{\Delta(\eta_2)} d\eta_2 & -\int^{x_2} \dfrac{\acute{I}\ (\eta_2, x_2)K(\eta_2, y_2)}{\Delta(\eta_2)} d\eta_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \int^{x_1}\int^{x_2} \frac{\acute{I}\ (\eta_1, x_1)\acute{I}\ (\eta_2, x_2)}{\Delta(\eta_1)\Delta(\eta_2)} \begin{vmatrix} K(\eta_{1,}y_1) & K(\eta_{1,}y_2) \\ K(\eta_{2,}y_1) & K(\eta_{2,}y_2) \end{vmatrix} d\eta_1 d\eta_2, \qquad (39_2)$$

$$M\begin{pmatrix} x_1\ x_2\ x_3 \\ y_1\ y_2\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$
=\begin{vmatrix}
-\int\limits^{x_1}\frac{\text{Í}\ (\eta_1,x_1)K(\eta_1,y_1)}{\Delta(\eta_1)}d\eta & -\int\limits^{x_1}\frac{\text{Í}\ (\eta_1,x_1)K(\eta_1,y_2)}{\Delta(\eta_1)}d\eta_1 & -\int\limits^{x_1}\frac{\text{Í}\ (\eta_1,x_1)K(\eta_1,y_3)}{\Delta(\eta_1)}d\eta_1 \\
-\int\limits^{x_2}\frac{\text{Í}\ (\eta_2,x_2)K(\eta_2,y_1)}{\Delta(\eta_2)}d\eta_1 & -\int\limits^{x_2}\frac{\text{Í}\ (\eta_2,x_2)K(\eta_2,y_2)}{\Delta(\eta_2)}d\eta_2 & -\int\limits^{x_2}\frac{\text{Í}\ (\eta_2,x_2)K(\eta_2,y_3)}{\Delta(\eta_2)}d\eta_2 \\
-\int\limits^{x_3}\frac{\text{Í}\ (\eta_3,x_3)K(\eta_3,y_1)}{\Delta(\eta_3)}d\eta_3 & -\int\limits^{x_3}\frac{\text{Í}\ (\eta_3,x_3)K(\eta_3,y_2)}{\Delta(\eta_3)}d\eta_3 & -\int\limits^{x_3}\frac{\text{Í}\ (\eta_3,x_3)K(\eta_3,y_3)}{\Delta(\eta_3)}d\eta_3
\end{vmatrix} =
$$

$$
=-\int\limits^{x_1}\int\limits^{x_2}\int\limits^{x_3}\frac{\text{Í}\ (\eta_1,x_1)\text{Í}\ (\eta_2,x_2)\text{Í}\ (\eta_3,x_3)}{\Delta(\eta_1)\Delta(\eta_2)\Delta(\eta_3)}\times
$$

$$
\times\begin{vmatrix}
K(\eta_{1,}y_1) & K(\eta_{1,}y_2) & K(\eta_{1,}y_3) \\
K(\eta_{2,}y_1) & K(\eta_{2,}y_2) & K(\eta_{2,}y_3) \\
K(\eta_{3,}y_1) & K(\eta_{3,}y_2) & K(\eta_{3,}y_3)
\end{vmatrix} d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \qquad (39_3)
$$

$$
M\begin{pmatrix} x_1 \dots x_r \\ y_1 \dots y_r \end{pmatrix} = (-1)^r \int\limits^{x_1}\dots\int\limits^{x_r}\frac{\text{Í}\ (\eta_1,x_1)\dots\text{Í}\ (\eta_r,x_r)}{\Delta(\eta_1)\dots\Delta(\eta_r)}\times
$$

$$
\times\begin{vmatrix}
K(\eta_{1,}y_1) & \dots & K(\eta_{1,}y_r) \\
K(\eta_{2,}y_1) & \dots & K(\eta_{2,}y_r) \\
\dots & \dots & \dots \\
K(\eta_{r,}y_1) & \dots & K(\eta_{r,}y_r)
\end{vmatrix} d\eta_1 d\eta_2 \dots d\eta_r, \qquad (39_r)
$$

Начнем с преобразования детерминантного ряда Фредгольма первого порядка, воспользовавшись формулами (38_r) при $r=1$:

$$
G\begin{pmatrix} x_1 \\ \acute{o}_1 \end{pmatrix}\lambda = M(x_1,\acute{o}_1) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i\lambda^i}{i!}\int\limits_a^b\dots\int\limits_a^b M\begin{pmatrix} x_1\ t_1 \dots t_i \\ \acute{o}_1\ t_1 \dots t_i \end{pmatrix}dt_1\dots dt_i \qquad (38_1)
$$

Подставим теперь выражения ($39_г$) в (38_1) :

$$G\begin{pmatrix} x_1 & \lambda \\ \acute{o}_1 & \end{pmatrix} = -\int^{x_1} \frac{\acute{I}\ (\eta_1, x_1) K(\eta_{1,} y_1)}{\Delta(\eta_1)} d\eta_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \lambda^i}{i!} \int_a^b \ldots \int_a^b \ dt_1 \ldots dt_i \ .$$

$$\cdot \int^{x_1} d\eta_1 \int^{t_1} \ldots \int^{t_i} \frac{\acute{I}\ (\eta_1, x_1) \acute{I}\ (\eta_2, t_1) \ldots \acute{I}\ (\eta_{i+1} t_i)}{\Delta(\eta_1) \ldots \Delta(\eta_{i+1})} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} K(\eta_{1,} y_1) & K(\eta_{1,} t_1) \ \ldots & K(\eta_{1,} t_i) \\ K(\eta_{2,} y_1) & K(\eta_{2,} t_1) \ \ldots & K(\eta_{2,} t_i) \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ K(\eta_{i+1,} y_1) & K(\eta_{i+1,} t_1) \ \ldots. & K(\eta_{i+1,} t_i) \end{vmatrix} d\eta_2 \ldots d\eta_{i+1} =$$

$$= -\int^{x_1} \frac{\acute{I}\ (\eta_1, x_1)}{\Delta(\eta_1)} \Big[K(\eta_{1,} y_1) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \int_a^b \ldots \int_a^b dt_1 \ldots dt_i \int^{t_1} \ldots \int^{t_i} \frac{\acute{I}\ (\eta_2, t_1) \ldots \acute{I}\ (\eta_{i+1} t_i)}{\Delta(\eta_2) \ldots \Delta(\eta_{i+1})} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} K(\eta_{1,} y_1) & K(\eta_{1,} t_1) \ \ldots & K(\eta_{1,} t_i) \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ K(\eta_{i+1,} y_1) & K(\eta_{i+1,} t_1) \ \ldots. & K(\eta_{i+1,} t_i) \end{vmatrix} d\eta_2 \ldots d\eta_{i+1} \Bigg] d\eta_1 .$$

Нетрудно заметить, что в квадратных скобках получили выражение $D\begin{pmatrix} \eta_1 & \lambda \\ \acute{o}_1 & \end{pmatrix}$, в соответствии с формулой (25_1), тогда

$$G\begin{pmatrix} x_1 & \lambda \\ \acute{o}_1 & \end{pmatrix} = -\int^{x_1} \frac{H(\eta_1, x_1)}{\Delta(\eta_1)} D\begin{pmatrix} \eta_1 & \lambda \\ \acute{o}_1 & \end{pmatrix} d\eta_1 . \qquad (40_1)$$

Проделав аналогичные выкладки для

$$G\begin{pmatrix} x_1 \ x_2 & \lambda \\ \acute{o}_1 \ \acute{o}_2 & \end{pmatrix} = \lambda M \begin{pmatrix} x_1 \ x_2 \\ \acute{o}_1 \ \acute{o}_2 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \lambda^{i+1}}{i!} \int_a^b \ldots \int_a^b M \begin{pmatrix} x_1 \ x_2 \ t_1 \ldots t_i \\ \acute{o}_1 \ \acute{o}_2 \ t_1 \ldots t_i \end{pmatrix} d\eta_1 \ldots d\eta_i , \qquad (38_2)$$

найдем детерминантный ряд Фредгольма второго порядка

$$G\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \lambda \\ y_1 & y_2 & \end{pmatrix} =$$

$$
=\lambda\int^{x_1}\int^{x_2}\frac{H(\eta_1,x_1)H(\eta_2,x_2)}{\Delta(\eta_1)\Delta(\eta_2)}\begin{vmatrix}K(\eta_1,y_1) & K(\eta_1,y_2)\\ K(\eta_2,y_1) & K(\eta_2,y_2)\end{vmatrix}d\eta_1 d\eta_2 +
$$

$$
+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i+1}}{i!}\int_a^b\cdots\int_a^b dt_1\cdots dt_n\int^{x_1}\int^{x_2}d\eta_1 d\eta_2\int^{t_1}\ldots
$$

$$
\ldots\int^{t_i}\frac{H(\eta_1,x_1)H(\eta_2,x_2)H(\eta_3,t_1)\cdots H(\eta_{i+2},t_i)}{\Delta(\eta_1)\Delta(\eta_2)\Delta(\eta_3)\cdots\Delta(\eta_{i+2})}\times
$$

$$
\times\begin{vmatrix}K(\eta_1,y_1) & K(\eta_1,y_2) & K(\eta_1,t_1) & \cdots & K(\eta_1,t_i)\\ K(\eta_2,y_1) & K(\eta_2,y_2) & K(\eta_2,t_1) & \cdots & K(\eta_1,t_i)\\ K(\eta_3,y_1) & K(\eta_3,y_2) & K(\eta_3,t_1) & \cdots & K(\eta_1,t_i)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K(\eta_{i+2},y_1) & K(\eta_{i+2},y_2) & K(\eta_{i+2},t_1) & \cdots & K(\eta_{i+2},t_i)\end{vmatrix}d\eta_3\ldots d\eta_{i+2} =
$$

$$
=\lambda\int^{x_1}\int^{x_2}\frac{H(\eta_1,x_1)H(\eta_2,x_2)}{\Delta(\eta_1)\Delta(\eta_2)}\Bigg[\begin{vmatrix}K(\eta_1,y_1) & K(\eta_1,y_2)\\ K(\eta_2,y_1) & K(\eta_2,y_2)\end{vmatrix}+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i}}{i!}\int_a^b\cdots\int_a^b dt_1\cdots dt_i\int^{t_1}\cdots\int^{t_i}\frac{H(\eta_3,t_1)\cdots H(\eta_{i+2},t_i)}{\Delta(\eta_1)\cdots\Delta(\eta_{i+2})}\times
$$

$$
\times\begin{vmatrix}K(\eta_1,y_1) & K(\eta_1,y_2) & K(\eta_1,t_1) & \cdots & K(\eta_1,t_i)\\ K(\eta_2,y_1) & K(\eta_2,y_2) & K(\eta_2,t_1) & \cdots & K(\eta_2,t_i)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K(\eta_{i+2},y_1) & K(\eta_{1i+2},y_2) & K(\eta_{i+2},t_1) & \cdots & K(\eta_{i+2},t_i)\end{vmatrix}d\eta_3\ldots
$$

$$
\ldots d\eta_{i+2}\Bigg]d\eta_1 d\eta_2,
$$

и, заменив квадратную скобку ее значением $D\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}\lambda$ в соответствии с (25_2), получим

$$G\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \lambda \\ y_1 & y_2 & \end{pmatrix} = \lambda \int^{x_1} \int^{x_2} \frac{H(\eta_1, x_1) H(\eta_2, x_2)}{\Delta(\eta_1)\Delta(\eta_2)} D\begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \lambda \\ y_1 & y_2 & \end{pmatrix} d\eta_1 d\eta_2 . \quad (40_2)$$

Аналогично можно получить подобное соотношение и для $G\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \lambda \\ y_1 & y_2 & y_3 & \end{pmatrix}$:

$$G\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \lambda \\ y_1 & y_2 & y_3 & \end{pmatrix} = -\lambda^2 \int^{x_1}\int^{x_2}\int^{x_3} \frac{H(\eta_1, x_1\ ) H(\eta_2, x_2) H(\eta_3, x_3)}{\Delta(\eta_1)\Delta(\eta_2)\Delta(\eta_3)} \times$$

$$\times \left[\begin{vmatrix} K(\eta_1, y_1) & K(\eta_1, y_2) & K(\eta_1, y_3) \\ K(\eta_2, y_1) & K(\eta_2, y_2) & K(\eta_2, y_3) \\ K(\eta_3, y_1) & K(\eta_3, y_2) & K(\eta_3, y_3) \end{vmatrix} + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i+2}}{i!} \int_a^b \ldots \int_a^b dt_1 \ldots dt_i \int^{x_1}\int^{x_2}\int^{x_3} d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \int^{x_4} \ldots$$

$$\ldots \int^{x_{i+3}} \frac{H(\eta_1, x_1) H(\eta_2, x_2) H(\eta_3, x_3) H(\eta_4, t_1) \cdots H(\eta_{i+3}, t_i)}{\Delta(\eta_{1_1})\Delta(\eta_2)\Delta(\eta_3 \cdot) \cdots \Delta(\eta_{i+3})} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} K(\eta_1, y_1) & K(\eta_1, y_2) & K(\eta_1, y_3) & K(\eta_1, t_1) & \cdots & K(\eta_1, t_i) \\ K(\eta_2, y_1) & K(\eta_2, y_2) & K(\eta_2, y_3) & K(\eta_2, t_1) & \cdots & K(\eta_2, t_i) \\ K(\eta_3, y_1) & K(\eta_3, y_2) & K(\eta_3, y_3) & K(\eta_3, t_1) & \cdots & K(\eta_3, t_i) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(\eta_{i+3}, y_1) & K(\eta_{i+3}, y_2) & K(\eta_{i+3}, y_3) & K(\eta_{i+3}, t_1) & \cdots & K(\eta_{i+3}, t_i) \end{vmatrix} d\eta_4 \ldots$$

$$\left. \ldots\ d\eta_{i+3} \right] d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 =$$

$$= -\lambda^2 \int^{x_1}\int^{x_2}\int^{x_3} \frac{H(\eta_1, x_1) H(\eta_2, x_2) H(\eta_3, x_3)}{\Delta(\eta_1)\Delta(\eta_2)\Delta(\eta_3)} D\begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \lambda \\ y_1 & y_2 & y_3 & \end{pmatrix} d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 , \quad (40_3)$$

и по индукции запишем соотношение для детерминантного ряда r-го порядка

$$G\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_r \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_r \end{pmatrix} \lambda \Bigg) =$$

$$= (-1)^r \lambda^{r-1} \int^{x_1} \cdots \int^{x_r} \frac{H(\eta_1, x_1) \cdots H(\eta_r, x_r)}{\Delta(\eta_1) \cdots \Delta(\eta_r)} D\begin{pmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_r \\ y_1 & \cdots & y_r \end{pmatrix} \lambda \Bigg) d\eta_1 \cdots d\eta_r,$$

$$r = 1, 2, \ldots \qquad (40_r)$$

2. Связь между решениями двух разрешающих интегральных уравнений

Чтобы установить связь между решениями ранее полученных двух разрешающих интегральных уравнений (10) и (20) для интегро-дифференциального уравнения (1) сначала выпишем эти уравнения

$$F(x) + \lambda \int_a^b \left[g(y) + \int^y \frac{H(\eta, y)}{\Delta(\eta)} F(\eta) d\eta \right] K(x, y) dy = 0 \qquad (10)$$

и

$$\Phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b M(x, y) \Phi(y) dy, \qquad (20)$$

где

$$\Phi(x) = \int^x \frac{H(\eta, y)}{\Delta(\eta)} F(\eta) d\eta,$$

$$f(x) = -\lambda \int_a^b dy \int^x \frac{H(\eta, x) K(\eta, y)}{\Delta(\eta)} g(y) d\eta,$$

$$M(x, y) = -\int^x \frac{H(\eta, x) K(\eta, y)}{\Delta(\eta)} d\eta.$$

Если найдено решение F(x) уравнения (10) то, воспользовавшись обозначениями в (20), найдем и его решение. И наоборот, если известно решение $\Phi(x)$ уравнения (20), то, учитывая (19) и подставив его в (10), найдем решение $F(x)$

$$F(x) = -\lambda\int_a^b \left[g(y) + \Phi(y)\right]K(x,y)dy\,. \qquad (41)$$

Если λ не является характеристическим числом, то решение уравнения (10) запишется в виде (22)

$$F(x) = -\frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b g(y)D\begin{pmatrix} x \\ & \lambda \\ y \end{pmatrix}dy\,. \qquad (22)$$

Если теперь (22) подставить в формулу для $\Phi(x)$ (19), то получим решение уравнения (20)

$$\Phi(x) = -\frac{\lambda}{D(\lambda)}\int^x g(y)dy\int_a^b \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}D\begin{pmatrix} \eta \\ & \lambda \\ y \end{pmatrix}d\eta\,, \qquad (42)$$

но это же решение уравнения (20) можно получить непосредственно по формулам Фредгольма

$$\Phi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b G\begin{pmatrix} x \\ & \lambda \\ y \end{pmatrix}f(y)dy\,. \qquad (42^*)$$

Подставив теперь (42*) в (41)

$$F(x) = -\lambda\int_a^b g(y)K(x,y)dy -$$

$$-\lambda\int_a^b K(x,y)\left[f(y) + \frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b G\begin{pmatrix} y \\ & \lambda \\ y_1 \end{pmatrix}f(y_1)dy_1\right]dy$$

и детерминант $G\begin{pmatrix} y \\ & \lambda \\ y_1 \end{pmatrix}$ по формуле (40_1), заменив на $D\begin{pmatrix} y \\ & \lambda \\ y_1 \end{pmatrix}$, (проделать самостоятельно), придем к ранее известному

$$F(x) = -\frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b g(y)D\begin{pmatrix} x \\ & \lambda \\ y \end{pmatrix}dy\,.$$

Возможен другой вариант получения этого результата. Для этого (42) подставим в (41)

$$F(x) = -\lambda \int_a^b g(y)K(x,y)dy +$$

$$+\frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b g(y_1) \left[\lambda \int_a^b \int^y \frac{H(\eta, y)}{\Delta(\eta)} D\begin{pmatrix} \eta & \lambda \\ y_1 & \end{pmatrix} K(x,y)dyd\eta \right] dy_1$$

и выражение в квадратных скобках заменим в соответствии с формулой для $D\begin{pmatrix} x & \lambda \\ y_1 & \end{pmatrix}$ в (23) выражением

$$\lambda \int_a^b \int^y \frac{H(\eta,, y)}{\Delta(\eta)} D\begin{pmatrix} \eta & \lambda \\ y_1 & \end{pmatrix} K(x,y)dyd\eta = K(x,y_1)D(\lambda) - D\begin{pmatrix} x & \lambda \\ y_1 & \end{pmatrix},$$

то

$$F(x) = -\lambda \int_a^b g(y)K(x,y)dy + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b g(y_1) \left[K(x,y_1)D(\lambda) - D\begin{pmatrix} x & \lambda \\ y_1 & \end{pmatrix} \right] dy_1 .$$

Разбив последний интеграл на сумму получим тот же результат

$$F(x) = -\frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b g(y_1) D\begin{pmatrix} x & \lambda \\ y_1 & \end{pmatrix} dy_1 .$$

3. Общее решение однородных уравнений, соответствующих разрешающим интегральным уравнениям

Выпишем однородное уравнение соответствующее разрешающему уравнению специального вида (10)

$$F(x) + \lambda \int_a^b \int^y \frac{H(\eta, y)}{\Delta(\eta)} K(x,y)F(\eta)d\eta = 0, \qquad (32)$$

которое получилось из (10) при

$$\int_a^b g(y)K(x,y)dy \equiv 0. \qquad (43)$$

Однородное уравнение, соответствующее разрешающему интегральному уравнению (20), будет

$$\Phi(x) = \lambda\int_a^b M(x,y)\Phi(y)dy, \tag{44}$$

которое получим из (20) при $f(x)\equiv 0$, т.е.

$$\int_a^b\int^y \frac{H(\eta,x)K(\eta,y)}{\Delta(\eta)} g(y)d\eta dy \equiv 0. \tag{45}$$

Нетрудно увидеть, что если выполняется тождество (43), то выполняется и (45) и наоборот. Также уравнение (44) можно получить из (32) и непосредственно, с помощью подстановки

$$\Phi(x) = \int^x \frac{H(\eta,x)}{\Delta(\eta)} F(\eta)d\eta \tag{46}$$

(проделать самостоятельно), поэтому за основное можно принять условие (43).

Если $\lambda = \lambda^*$ является характеристическим числом ранга q, то между фундаментальными функциями уравнений (32) и (44) будет устанавливаться связь по формуле (46), т.е.

$$\Phi_\alpha(x) = \int^x \frac{H(\eta,x)}{\Delta(\eta)} F_\alpha(\eta)d\eta,\ \alpha = \overline{1,q}. \tag{47}$$

Общее решение однородного уравнения (44) запишется

$$\Phi(x) = \sum_{\alpha=1}^{q} C_\alpha \Phi_\alpha(x),$$

но тогда общее решение уравнения (32) можно представить через решения уравнения (47), т.е.

$$F(x) = -\lambda^*\int_a^b K(x,y)\sum_{\alpha=1}^{q} C_\alpha \Phi_\alpha(y)dy. \tag{48}$$

Нетрудно показать, что функция (48) дает тоже общее решение, которое было получено ранее

$$F(x) = \sum_{\alpha=1}^{q} C_\alpha F_\alpha(x). \tag{49}$$

Для этого в (48) вместо $\Phi_\alpha(x)$ подставим (47)

$$F(x)=\sum_{\alpha=1}^{q}C_{\alpha}\left[-\lambda^{*}\int_{a}^{b}\int^{y}\frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}K(x,y)F_{\alpha}(\eta)d\eta dy\right]. \qquad (50)$$

Функции $F_{\alpha}(x)$ должны удовлетворять однородному уравнению (32), т.е. имеем

$$F_{\alpha}(x)+\lambda^{*}\int_{a}^{b}\int^{y}\frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}K(x,y)F_{\alpha}(\eta)d\eta dy\equiv 0,\quad \alpha=\overline{1,q}. \qquad (51)$$

Из (51) определим значение интегралов и подставим в равенство (50), получим равенство (49)

$$F(x)=\sum_{\alpha=1}^{q}C_{\alpha}F_{\alpha}(x). \qquad (49)$$

4.Построение сопряженного уравнения и аналог третьей теоремы Фредгольма

Для вывода аналога первых двух теорем Фредгольма разрешающим уравнением (20) можно было не пользоваться. При доказательстве третьей теоремы Фредгольма без разрешающего уравнения (20) обойтись, по крайней мере, чрезвычайно трудно.

Выпишем оба разрешающих уравнения для уравнения (1)

$$F(x)+\lambda\int_{a}^{b}\left[g(y)+\int^{y}\frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}F(\eta)d\eta\right]K(x,y)dy=0\ , \qquad (10)$$

$$\Phi(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}M(x,y)\Phi(y)dy \qquad (20)$$

и соответствующие им однородные уравнения

$$F(x)+\lambda\int_{a}^{b}\int^{y}\frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}K(x,y)F(\eta)d\eta dy=0, \qquad (32)$$

$$\Phi(x)=\lambda\int_{a}^{b}M(x,y)\Phi(y)dy\ . \qquad (44)$$

Составить сопряженное уравнение для уравнения (32) непосредственно, если и возможно, то очень трудно, тогда как записать сопряженное уравнение для уравнения (44) очень просто. В соответствии с теорией Фредгольма оно будет

$$\psi(x)=\lambda\int_a^b M(y,x)\psi(y)dy\,. \qquad (52)$$

Пусть $\lambda=\lambda^*$ – характеристическое число ранга q. В (52) при $\lambda=\lambda^*$ подставим значение ядра $M(x,y)$

$$\psi(x)+\lambda^*\int_a^b\int^y \frac{H(\eta,y)K(\eta,x)}{\Delta(\eta)}\psi(\eta)d\eta dy=0\,. \qquad (53)$$

Возникает вопрос, можно ли уравнение (53) принять за сопряженное однородному уравнению (32). Докажем, что да. Для этого введем скалярное произведение функций $f=f(x)$ и $v=v(x)$ с весом

$$(f,v)=\int_a^b\int^x \frac{H(\eta,x)}{\Delta(\eta)}f(\eta)v(x)d\eta dx\,. \qquad (54)$$

Нетрудно проверить, что для этого скалярного произведения закон коммутативности не выполняется, т.е. $(f,v)\neq(v,f)$. Из функционального анализа следует, что два оператора

$$AF=-\int_a^b dy\int^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}K(x,y)F(\eta)d\eta$$

и

$$A^*\psi=-\int_a^b dy\int^y \frac{H(\eta,y)K(\eta,x)}{\Delta(\eta)}\psi(\eta)d\eta$$

будут сопряженными, если $(AF,\psi)=(F,A^*\psi)$.

Докажем их сопряженность. Для этого в AF заменим x на η и η на η_1, тогда

$$(AF,\psi)=\int_a^b dx\int^x \frac{H(\eta,x)}{\Delta(\eta)}\left(-\int_a^b\int^y \frac{H(\eta_1,y)K(\eta,y)}{\Delta(\eta_1)}F(\eta_1)d\eta_1\right)\psi(\eta)d\eta\,.$$

Заменим теперь η_1 на η, η на η_1, x на y, y на x:

$$(AF,\psi)=-\int_a^b\int_a^b\int^y\int^x \frac{H(\eta_1,y)H(\eta,x)K(\eta_1,x)}{\Delta(\eta_1)\Delta(\eta)}F(\eta)\psi(\eta_1)d\eta_1 d\eta dydx=$$

$$=\int_a^b dx\int^x \frac{H(\eta,x)}{\Delta(\eta)}F(\eta)\left[-\int_a^b dy\int^y \frac{H(\eta_1,y)K(\eta_1,x)}{\Delta(\eta_1)}\psi(\eta_1)d\eta_1\right]d\eta=$$

$$=\int_a^b dx\int^x \frac{H(\eta,x)}{\Delta(\eta)}F(\eta)A^*\psi d\eta=(F,A^*\psi). \qquad (55)$$

Что требовалось доказать.

Далее нетрудно доказать, что характеристические полиномы уравнения (32) $D(\lambda)$ и уравнения (44) $D^*(\lambda)$ совпадают, т.е. $D(\lambda)=D^*(\lambda)$ (доказать самостоятельно).

Дальнейшую теорию можно строить, опираясь на сопряженное уравнение (53). Мы пойдем другим путем, будем опираться на хорошо известную теорию Фредгольма для неоднородного интегрального уравнения (20) и однородного (44).

Пусть $\lambda=\lambda^*$ характеристическое число ранга q, в этом случае уравнение (20) может иметь решение тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ ортогональна к любой фундаментальной функции сопряженного уравнения (52) (по третьей теореме Фредгольма), т.е.

$$\int_a^b f(x)\psi_\alpha(x)dx=0,\quad \alpha=\overline{1,q}. \qquad (56)$$

Фундаментальная система решений сопряжённого уравнения

$$\psi_\alpha(x)\equiv\lambda^*\int_a^b M(y,x)\psi_\alpha(y)dy$$

может быть найдена в соответствии с теорией Фредгольма по формуле

$$\psi_\alpha(x)=\frac{G\begin{pmatrix} x_1^*\ldots x_{\alpha-1}^*\; x\, x_{\alpha+1}^*\ldots x_q^* & \lambda^* \\ y_1^*\ldots y_{\alpha-1}^*\; y_\alpha^*\; y_{\alpha+1}^*\ldots y_q^* & \end{pmatrix}}{G\begin{pmatrix} x_1^*\ldots x_q^* & \lambda^* \\ y_1^*\ldots y_q^* & \end{pmatrix}}.$$

Выражения для $G\begin{pmatrix} x_1^*\ldots x_{\alpha-1}^*\; x\, x_{\alpha+1}^*\ldots x_q^* & \lambda^* \\ y_1^*\ldots y_{\alpha-1}^*\; y_\alpha^*\; y_{\alpha+1}^*\ldots y_q^* & \end{pmatrix}$ можно получить по формулам ($40_г$)

И решение уравнения (20), если оно существует, найдется по формуле

$$\Phi(x) = f(x) + \lambda^* \int_a^b N^*(x,s) f(s) ds + \sum_{\alpha=1}^{q} A_\alpha \Phi_\alpha(x), \quad (57)$$

где $N^*(x,s)$ – обобщенная резольвента ядра $M(x,y)$,

$$N^*(x,s) = G\begin{pmatrix} x, & x_1^*, & \ldots, & x_q^* \\ s, & y_1^*, & \ldots, & y_q^* \end{pmatrix}\lambda^* \Bigg/ G\begin{pmatrix} x_1^*, & \ldots, & x_q^* \\ y_1^*, & \ldots, & y_q^* \end{pmatrix}\lambda^*. \quad (58)$$

Теперь можно перейти к решению уравнения (10). Вспомним формулу (41) §2 и подставим в нее $\lambda = \lambda^*$ и $\Phi(x)$ в соответствии с (57)

$$F(x) = -\lambda^* \int_a^b K(x,y) g(y) dy -$$

$$-\lambda^* \int_a^b K(x,y) \left[f(y) + \lambda^* \int_a^b N^*(y,s) f(s) ds + \sum_{\alpha=1}^{q} A_\alpha \Phi_\alpha(y) \right] dy$$

или $F(x) =$

$$= -\lambda^* \int_a^b K(x,y) \left[g(y) + f(y) + \lambda^* \int_a^b N^*(y,s) f(s) ds + \sum_{\alpha=1}^{q} A_\alpha \Phi_\alpha(y) \right] dy. \quad (59)$$

Далее определители в $N^*(y,s)$ и $\Phi_\alpha(y)$ можно выразить через определители ядра $K(x,y)$ и получить окончательную формулу для решения уравнения (10). (проделав самостоятельно, получите формулу (59*). При этом условие разрешимости (условие ортогональности) запишется

$$\int_a^b dx \int_a^b dy \int^x \frac{H(\eta,x)K(\eta,y)}{\Delta(\eta)} g(y) \psi_\alpha(x) d\eta = 0, \quad \alpha = \overline{1,q}. \quad (60)$$

Теперь можно сформулировать аналог третьей теоремы Фредгольма:

Если $\lambda = \lambda^*$ ***– характеристическое число ранга q, то разрешающее уравнение (10), вообще говоря, не имеет решения, но если выполняются условия ортогональности (60), то решение уравнения (10) может быть найдено по формуле (59) или (59*), следовательно, решение уравнения (1) по формуле (9).***

В этом случае нарушается свойство единственности решения, так как формула (59) содержит q произвольных постоянных, не определяемых начальными условиями. А в общем решении будет содержаться (n+q) произвольных постоянных.

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$z'' - 2z' + z + \lambda \int_0^1 t\, z(t)dt = 0$$

и решения при характеристических значениях $\lambda,$ если они существуют.

В уравнении $K(x,t)=t$, $L_2[z(x)] = z'' - 2z' + z$, $P_0(x,t) = z(t)$. Приравняв $L_2[z(x)]=0$, найдем $z_1(x) = e^x$, $z_2(x) = xe^x$ и в соответствии с обозначениями в уравнении (10)

$$\Delta(x) = e^{2x}, \Delta_1(x) = -xe^x, \Delta_2(x) = e^x,$$

$$g(x) = C_1e^x + C_2xe^x, H(x,y) = -xe^xe^y + ye^ye^x.$$

Используя рекуррентные формулы (28*) и (29*) определим

$$D(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2} \text{ и } D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y$$

и, затем, по формулам (22) и (9), соответственно, решения разрешающего уравнения (10) и данного интегро-дифференциального уравнения

$$F(x) = -\frac{2\lambda}{2+\lambda}\left[C_1 + C_2(e-2)\right],$$

$$z(x) = C_1e^x + C_2xe^x - \frac{2\lambda}{2+\lambda}\left[C_1 + C_2(e-2)\right].$$

Теперь перейдем к решению второй части задачи.
Приравняв $D(\lambda)=0$, найдем единственное характеристическое число ядра данного уравнения $\lambda^* = -2$ и по формуле (34) соответствующую ему фундаментальную функцию $F_1(x) = 1$.

Выясним теперь, имеет ли решение разрешающее уравнение (10) при характеристическом значении $\lambda^* = -2$, для этого проверим выполнение условий ортогональности (60)

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int^x \frac{\left(-\eta e^{\eta} e^{y} + x e^{x} e^{\eta}\right) y}{e^{2\eta}} \left(C_1 e^{y} + C_2 y e^{y}\right) \psi_{\alpha}(x) d\eta = 0 .$$

Самостоятельно сделать проверку и довести решение задачи до конца.

§4. Линейные однородные интегродифференциальные уравнения при $n \le m$

1.Общее решение при n≤m

Рассмотрим вначале однородное уравнение

$$L_n\left[z(x)\right] + \lambda \int_a^b K(x,y) P_m\left[z(y)\right] dy = 0, \qquad (61)$$

где $m = n + p, \quad p \ge 0$, и пусть существуют $\dfrac{\partial^{p+1} K(x,y)}{\partial x^{p+1}}$.

Продифференцируем (p+1) раз уравнение (61):

$$\frac{d^{p+1} L_n\left[z(x)\right]}{dx^{p+1}} + \lambda \int_a^b \frac{\partial^{p+1} K(x,y)}{\partial x^{p+1}} P_m\left[z(y)\right] dy = 0 . \qquad (62)$$

Как и прежде, введем неизвестную функцию

$$L_n\left[z(x)\right] = F(x) . \qquad (63)$$

Продифференцировав последнее равенство (p+1) раз придем к уравнению

$$\frac{d^{p+1} L_n\left[z(x)\right]}{dx^{p+1}} = F^{(p+1)}(x) , \qquad (64)$$

которое разрешим, применяя дважды метод вариации произвольных постоянных.

Из уравнения
$$\frac{d^{p+1} L_n\left[z(x)\right]}{dx^{p+1}} = 0 \qquad (65)$$

следует, что

$$L_n\left[z(x)\right] = C_{n+1} + C_{n+2} x + \cdots + C_{n+p+1} x^{p} . \qquad (66)$$

Пусть уравнение $L_n\left[z(x)\right] = 0$ имеет фундаментальную систему решений $z_i(x), \; i = \overline{1, n}$, тогда его решение запишется

$$z(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i z_i(x).$$

Применяя метод вариации произвольной постоянной первый раз, найдем решение уравнения (66), решив систему

$$\begin{cases} C_1'(x)z_1(x)+C_2'(x)z_2(x)+\cdots+C_n'(x)z_n(x)=0, \\ C_1'(x)z_1'(x)+C_2'(x)z_2'(x)+\cdots+C_n'(x)z_n'(x)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ C_1'(x)z_1^{(n-1)}(x)+C_2'(x)z_2^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n'(x)z_n^{(n-1)}(x)=\sum\limits_{i=1}^{p+1} C_{n+i}x^{i-1}. \end{cases}$$

Определитель этой системы $\Delta(x)$ – определитель Вронского фундаментальной системы функций $z_i(x),\ i=\overline{1,n}$, и, следовательно, $\Delta(x)\neq 0$. По формулам Крамера находим решение

$$C_i' = \frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)},\ \ i=\overline{1,n},$$

где

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) & \cdots & z_n(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) & \cdots & z_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_1^{(n-1)}(x) & z_2^{(n-1)}(x) & \cdots & z_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

а $\Delta_i(x)$ – алгебраические дополнения при разложении определителя

$$\omega_i(x)=\begin{vmatrix} z_1(x) & \cdots & z_{i-1}(x) & 0 & z_{i+1}(x) & \cdots & z_n(x) \\ z_1'(x) & \cdots & z_{i-1}'(x) & 0 & z_{i+1}'(x) & \cdots & z_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_1^{(n-2)}(x) & \cdots & z_{i-1}^{(n-2)}(x) & 0 & z_{i+1}^{(n-1)}(x) & \cdots & z_n^{(n-2)}(x) \\ z_1^{(n-1)}(x) & \cdots & z_{i-1}^{(n-1)}(x) & \sum\limits_{k=1}^{p+1} C_{n+k}x^{k-1} & z_{i+1}^{(n-1)}(x) & \cdots & z_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

по элементам i-го столбца. Коэффициенты $C_i(x)$ определятся интегрированием

$$C_i(x)=\int^{x} \frac{\Delta_i(\eta)}{\Delta(\eta)}\sum_{k=1}^{p+1} C_{n+k}\eta^{k-1}d\eta + C_i.$$

Подставляя полученные выражения для $C_i(x)$ в решение

$$z(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i(x) z_i(x),$$

получим

$$z(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i z_i(x)+C_{n+1}\int^{x}\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(\eta) z_i(x)}{\Delta(\eta)}d\eta+$$

$$+C_{n+2}\int^{x}\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(\eta) z_i(x)}{\Delta(\eta)}\eta d\eta+\cdots+C_{n+p+1}\int^{x}\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(\eta) z_i(x)}{\Delta(\eta)}\eta^{p} d\eta$$

и, вводя обозначения

$$\int^{x}\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(\eta) z_i(x)}{\Delta(\eta)}\eta^{p} d\eta = z_{n+p+1}(x), \tag{67}$$

запишем решение однородного уравнения (65):

$$z(x)=\sum_{i=1}^{n+p+1} C_i z_i(x).$$

Для решения неоднородного дифференциального уравнения (64) составим определитель Вронского

$$\overline{\Delta}(x)=\begin{vmatrix} z_1(x) & \cdots & z_{n+p+1}(x) \\ z_1^{'}(x) & \cdots & z_{n+p+1}^{'}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_1^{(n+p)}(x) & \cdots & z_{n+p+1}^{(n+p)}(x) \end{vmatrix}\neq 0,$$

он не равняется нулю, так как функции, определяемые интегралами

$$\int^{x}\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(\eta) z_i(x)}{\Delta(\eta)}\eta^{k} d\eta,\ k=\overline{1,p}$$

линейно независимы как между собой, так и с $z_i(x)$ при $i=\overline{1,n}$.

Теперь еще раз применим метод вариации произвольных постоянных

$$\begin{cases} z_1\overline{C_1'}(x)+\cdots+z_{n+p+1}\overline{C'_{n+p+1}}(x)=0 \\ z_1'\overline{C_1'}(x)+\cdots+z'_{n+p+1}\overline{C'_{n+p+1}}(x)=0 \\ \ldots \\ z_1^{(n+p-1)}\overline{C_1'}(x)+\cdots+z_{n+p+1}^{(n+p-1)}\overline{C'_{n+p+1}}(x)=0 \\ z_1^{(n+p)}\overline{C_1'}(x)+\cdots+z_{(n+p+1)}^{(n+p)}\overline{C'_{n+p+1}}(x)=F^{(p+1)}(x). \end{cases}$$

Главный определитель этой системы $\overline{\Delta}(x)$. Остальные определители будут $\overline{\omega_i}(x)=$

$$=\begin{vmatrix} z_1(x) & \cdots & z_{i-1}(x) & 0 & z_{i+1}(x) & \cdots & z_{n+p+1}(x) \\ z_1'(x) & \cdots & z_{i-1}'(x) & 0 & z_{i+1}'(x) & \cdots & z_{n+p+1}'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_1^{(n+p-1)}(x) & \cdots & z_{i-1}^{(n+p-1)}(x) & 0 & z_{i+1}^{(n+p-1)}(x) & \cdots & z_{n+p+1}^{(n+p-1)}(x) \\ z_1^{(n+p)}(x) & \cdots & z_{i-1}^{(n+p1)}(x) & F^{(p+1)}(x) & z_{i+1}^{(n+p)}(x) & \cdots & z_{n+p+1}^{(n+p)}(x) \end{vmatrix}.$$

Решив систему найдем

$$\overline{C}_i'(x)=\frac{\overline{\Delta}_i(x)}{\overline{\Delta}(x)}F^{(p+1)}(x),\quad i=\overline{1,n+p+1}\,,$$

где $\overline{\Delta}_i(x)$ определяется, как и в предыдущем случае, при разложении определителей $\overline{\omega_i}(x)$ по элементам i-го столбца и последней строки. Интегрируя $\overline{C}_i'(x)$, найдем

$$\overline{C}_i(x)=\int^x\frac{\overline{\Delta}_i(\eta)}{\overline{\Delta}(\eta)}F^{(p+1)}(\eta)d\eta+C_i\,,\ i=\overline{1,p+n+1}. \qquad (69)$$

Тогда решение уравнения (68) запишется

$$z(x)=\sum_{i=1}^{n+p+1}C_i(x)z_i+\int^x\frac{\sum\limits_{i=1}^{n+p+1}\overline{\Delta}_i(\eta)z_i(x)}{\overline{\Delta}(\eta)}F^{(p+1)}(\eta)d\eta. \ (70)$$

Далее обнулим лишние произвольные постоянные (в общем случае это можно сделать) $C_{n+1}=C_{n+2}=\ldots=C_{n+p+1}=0$, найдем $P_m[z(y)]$:

$$P_m[z(y)]=\sum_{i=1}^{n}C_iP_m[z_i(y)]+\int^{y}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n+p+1}\overline{\Delta}_i(\eta)P_m[z_i(y)]}{\overline{\Delta}(\eta)}F^{(p+1)}(\eta)d\eta$$

и, вводя обозначения для известных выражений

$$g(y)=\sum_{i=1}^{n}\ C_iP_m[z_i(y)],\quad \overline{H}(\eta,y)=\sum_{i-1}^{n+p+1}\overline{\Delta}_i(\eta)P_m[z_i(y)],$$

придем к разрешающему интегродифференциальному уравнению

$$F(x)+\lambda\int_a^b\left[g(y)+\int^{y}\frac{\overline{H}(\eta,y)}{\overline{\Delta}(\eta)}F^{(p+1)}(\eta)d\eta\right]K(x,y)dy=0\,. \qquad (71)$$

Полученное интегро-дифференциальное уравнение путем дифференцирования (p+1) раз легко преобразуется в интегральное уравнение специального вида

$$F^{(p+1)}(x)+\lambda\int_a^b\left[g(y)+\int^{y}\frac{\overline{H}(\eta,y)}{\overline{\Delta}(\eta)}F^{(p+1)}(\eta)d\eta\right]\frac{\partial^{p+1}K(x,y)}{\partial x^{p+1}}dy=0\,, \qquad (72)$$

решив которое и подставив найденное выражение для $F^{(p+1)}(x)$ в формулу (70), получим общее решение уравнения (61).

2.Решение задачи Коши при $n\le m$

Решение уравнения (61) усложняется, если поставить задачу Коши. Пусть $z^{(i)}(x_0)=z_0^{(i)}$,

$i=\overline{0,n-1}$, тогда в формуле (70) решения уравнения в нижнем пределе интеграла появится x_0

$$z(x)=\sum_{i=1}^{n+p+1}C_iz_i+\int_{x_0}^{x}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n+p+1}\overline{\Delta}_i(\eta)z_i(x)}{\overline{\Delta}(\eta)}F^{(p+1)}(\eta)d\eta\,. \qquad (70_0)$$

Появление нижнего предела интегрирования при подстановке (70_0) в уравнение (61) не дает разрешающее уравнение (71), а получается нагруженное интегродифференциальное уравнение

$$F(x) - F(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} F'(x_0) -$$
$$- \frac{(x-x_0)^2}{2!} F''(x_0) + \cdots + (-1)^{p+1} \frac{(x-x_0)^p}{p!} F^{(p)}(x_0) +$$
$$+ \lambda \int_a^b \left[g(y) + \int_{x_0}^{y} \frac{\overline{H}(\eta, y)}{\Delta(\eta)} F^{(p+1)}(\eta) d\eta \right] K(\eta, y) dy = 0 ,$$

решить которое пока никто не смог.

Другой вариант решения состоит в сохранении постоянных, которые занулили при нахождении общего решения и которыми можно распорядиться при решении задачи Коши. Подставляя (70_0) в уравнение (61) получим нагруженное интегродифференциальное уравнение

$$C_{n+1} + C_{n+2} x + \cdots + C_{n+p+1} x^p + F(x) -$$
$$- F(x_0) + \cdots + (-1)^{p+1} \frac{(x-x_0)^p}{p!} F^{(p)}(x_0) +$$
$$+ \lambda \int_a^b \left[\bar{g}(y) + \int_{x_0}^{y} \frac{\overline{H}(\eta, y)}{\bar{\Delta}(\eta)} F^{(p+1)}(\eta) d\eta \right] K(x, y) dy = 0 ,$$

где $\bar{g}(y) = C_1 P_m[z_1(y)] + \cdots + C_n P_m[z_n(y)] + \cdots + C_{n+p+1} P_m[z_{n+p+1}(y)]$.

Теперь распорядимся лишними произвольными постоянными, положив

$$C_{n+1} + C_{n+2} x + \cdots + C_{n+p+1} x^p - F(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} F(x_0) +$$
$$+ \frac{(x-x_0)^2}{2!} F''(x_0) + \cdots + (-1)^{p+1} \frac{(x-x_0)^p}{p!} F^{(p)}(x_0) \equiv 0, \tag{73}$$

получим разрешающее уравнение

$$F(x) + \lambda \int_a^b \left[\bar{g}(y) + \int_{x_0}^{y} \frac{\overline{H}(\eta, y)}{\bar{\Delta}(\eta)} F^{(p+1)}(\eta) d\eta \right] K(x, y) dy = 0, \tag{74}$$

аналогичное уравнению (71), продифференцировав которое (p+1) раз придем к разрешающему уравнению специального вида (72)

$$F^{(p+1)}(x)+\lambda\int_a^b \bar{g}(y)+\left[\int_{x_0}^{y}\frac{\bar{H}(\eta,y)}{\bar{\Delta}(\eta)}F^{(p+1)}(\eta)d\eta\right]\frac{\partial^{p+1}K(x,y)}{\partial x^{p+1}}dy=0\,. \quad (75)$$

Для определения лишних постоянных тождество (73) продифференцируем p-раз и подставим $x=x_0$, тогда получим систему

$$\left.\begin{array}{c} C_{n+1}+C_{n+2}x_0+C_{n+3}x_0^{\ 2}+\cdots+C_{n+p+1}x_0^{\ p}=F(x_0) \\ C_{n+2}+2x_0C_{n+3}+\cdots+pC_{n+p+1}x_0^{\ p-1}=F'(x_0) \\ p!C_{n+p+1}=F^{(p)}(x_0) \end{array}\right\}. \quad (76)$$

Первые *n* постоянных $C_1,...,C_n$ можно определить заранее, используя начальные данные. Интегралы в (70$_0$) при $x=x_0$ исчезнут, исчезнут так же и выражения с $C_{n+1},C_{n+2},...,C_{n+p+1}$, так как

$$z_{n+p+1}(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(\eta)z_i(x)}{\Delta(\eta)}\eta^p d\eta\,.$$

Рассмотренные варианты решения сильно усложняют решение задачи Коши, поэтому рациональнее, в этом случае, сначала найти общее решение и затем, используя начальные условия, определить оставшиеся постоянные.

Пример7. Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} z'-z+\lambda\int_0^1 xy[z'(y)+z(y)]dy=0\,, \\ z(x_0)=1,\ x_0\in[0,1], \end{cases}$$

$$z(x)=C_1e^x+\lambda\int^{x}\left(e^xe^{-y}-1\right)F'(\eta)d\eta\,,$$

$$F(x)+\lambda\int_0^1\left[2C_1e^y+\int^{y}(2e^ye^{-\eta}-1)F'(\eta)d\eta\right]xydy=0\,,$$

$$F'(x)+\lambda\int_0^1\left[2C_1e^y+\int^{y}(2e^ye^{-\eta}-1)F'(\eta)d\eta\right]ydy=0.$$

Решив последнее уравнение, найдем

$$F'(x) = -\frac{6C_1\lambda}{3-4\lambda},$$

а затем и общее решение данного интегродифференциального уравнения

$$z(x) = C_1 e^x + \frac{6C_1\lambda}{3-4\lambda}(1+x).$$

Положив $x = x_0$, определим C_1:

$$C_1 = \frac{3-4\lambda}{e^{x_0}(3-4\lambda)+6\lambda(1+x_0)}.$$

Подставляя найденное выражение для C_1 в общее решение $z(x)$, найдем решение задачи Коши

$$z(x) = \frac{\left[(3-4\lambda)e^x + 6\lambda(1+x)\right]}{e^{x_0}(3-4\lambda)+6\lambda(1+x_0)}.$$

§5. Линейные неоднородные интегродифференциальные уравнения

1.Нахождение общего решения при n>m

Продолжаем рассматривать случай $n>m$.

$$L_n[z(x)] + \lambda\int_a^b K(x,y)P_m[z(y)]dy = \varphi(x). \qquad (77)$$

Положим $L_n[z(x)] = F(x) + \varphi(x)$, тогда разрешающее специальное уравнение примет вид

$$F(x) + \lambda\int_a^b \left\{ g(y) + \int^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}\left[F(\eta)+\varphi(\eta)\right]d\eta \right\} K(x,y)dy = 0$$

или

$$F(x) + \lambda\int_a^b \left[G(y) + \int^y \frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}F(\eta)d\eta \right] K(x,y)dy = 0, \qquad (78)$$

где $G(y)=g(y)+\int^{y}\frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}\varphi(\eta)d\eta$.

В случае $D(\lambda)\neq 0$, т.е. если λ не является характеристическим числом, решение уравнения (78) в соответствии с формулой (22) получим в виде

$$F(x)=-\frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda G(y)dy, \tag{79}$$

и решение уравнения (77) запишется

$$z(x)=\sum_{i=1}^{n}\left\{C_i z_i(x)+\int^{x}\frac{\Delta_i(\eta)z_i(x)}{\Delta(\eta)}\left[F(\eta)+\varphi(\eta)\right]d\eta\right\}. \tag{80}$$

2. Решение задачи Коши при n>m

Рассмотрим начальную задачу для интегро-

дифференциального уравнения (77) с начальными условиями

$$z^{(i)}(x_0)=z_0^{(i)},\ i=\overline{0,n-1}\quad \text{и}\quad x_0\in[a,b]. \tag{77_0}$$

Учитывая начальные условия, разрешающее уравнение (78) запишется

$$F(x)+\lambda\int_a^b\left[G_0(y)+\int_{x_0}^{y}\frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}F(\eta)d\eta\right]K(x,y)dy=0, \tag{78_0}$$

где $G_0(y)=g_0(y)+\int_{x_0}^{y}\frac{H(\eta,y)}{\Delta(\eta)}\varphi(\eta)d\eta$.

В случае $D_0(\lambda)\neq 0$, т.е. если λ не является характеристическим числом, решение уравнения (78_0) в соответствии с формулой (22_0) получим в виде

$$F(x)=-\frac{\lambda}{D_0(\lambda)}\int_a^b D_0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda G_0(y)dy \tag{79_0}$$

и решение задачи Коши получим по формуле

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[C_{i0} z_i(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\Delta_i(\eta) z_i(x)}{\Delta(\eta)} \left[F(\eta) + \varphi(\eta) \right] d\eta \right]. \quad (80_0)$$

3. Линейные неоднородные интегродифференциальные уравнения при n≤m

Рассмотрим уравнение

$$L_n[z(x)] + \lambda \int_a^b K(x,y) P_m[z(y)] dy = \varphi(x), \quad (77)$$

где $n \le m$, пусть $m=n+p$, $p \ge 0$ и существуют $\dfrac{\partial^{p+1} K(x,y)}{\partial x^{p+1}}$ и $\varphi^{(p+1)}(x)$.

Продифференцируем $(p+1)$ раз уравнение (77):

$$\frac{\partial^{p+1} L_n\{z(x)\}}{\partial x^{p+1}} + \lambda \int_a^b \frac{\partial^{p+1} K(x,y)}{\partial x^{p+1}} P_m[z(y)] dy = \varphi^{(p+1)}(x), \quad (81)$$

затем, как и в п.1 §5, положим $L_n[z(x)] = F(x) + \varphi(x)$.

Продифференцировав последнее равенство $(p+1)$ раз придем к уравнению

$$\frac{\partial^{p+1} L_n\{z(x)\}}{\partial x^{p+1}} = F^{(p+1)}(x) + \varphi^{(p+1)}(x), \quad (82)$$

которое разрешим, аналогично как и в *§4*, применяя дважды метод вариации произвольных постоянных. Рассмотрим сначала соответствующее ему однородное уравнение

$$\frac{\partial^{p+1} L_n\{z(x)\}}{\partial x^{p+1}} = 0, \quad (65)$$

откуда следует, что

$$L_n[z(x)] = C_{n+1} + C_{n+2} x + \ldots + C_{n+p+1} x^p. \quad (66)$$

И если уравнение $L_n[z(x)] = 0$ имеет фундаментальную систему решений $z_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, то решение этого уравнения запишется $z(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i z_i(x)$ и далее все аналогично, как и в §4.

При повторном применении метода вариации произвольных постоянных система для их определения несколько измениться

$$\begin{cases} z_1\overline{\overline{C}}_1'(x)+\cdots+z_{n+p+1}\overline{\overline{C'_{n+p+1}}}(x)=0 \\ z_1'\overline{\overline{C}}_1'(x)+\cdots+z'_{n+p+1}\overline{\overline{C'_{n+p+1}}}(x)=0 \\ \ldots \\ z_1^{(n+p-1)}\overline{\overline{C_1'}}(x)+\cdots+z_{n+p+1}^{(n+p-1)}\overline{\overline{C'_{n+p+1}}}(x)=0 \\ z_1^{(n+p)}\overline{\overline{C_1'}}(x)+\cdots+z_{(n+p+1)}^{(n+p)}\overline{\overline{C'_{n+p+1}}}(x)=F^{(p+1)}(x)+\varphi^{(p+1)}(x) \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем

$$\overline{C}_i'(x)=\frac{\overline{\Delta}_i(x)}{\overline{\Delta}(x)}\left[F^{(p+1)}(x)+\varphi^{(p+1)}(x)\right],\ \ i=\overline{1,n+p+1}\,.$$

Интегрируя $\overline{C_i'}(x)$, получим

$$\overline{C_i}(x)=\int^x\frac{\overline{\Delta}_i(\eta)}{\overline{\Delta}(\eta)}\left[F^{(p+1)}(\eta)+\varphi^{(p+1)}(\eta)\right]d\eta+C_i\,, i=\overline{1,n+p+1}\,, \quad (83)$$

где $\overline{\overline{\Delta}}_i(\eta)$ – алгебраические дополнения при разложении определителя

$$\overline{\overline{\omega}}_i(x)=\begin{vmatrix} z_1(x) & \ldots & z_{i-1}(x) & 0 & z_{i+1}(x) & \ldots & z_{n+p+1}(x) \\ z_1'(x) & \ldots & z_{i-1}'(x) & 0 & z_{i+1}'(x) & \ldots & z_{n+p+1}'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n+p-1)}(x) & \ldots & z_{i-1}^{(n+p-1)}(x) & 0 & z_{i+1}^{(n+p-1)}(x) & \ldots & z_{n+p+1}^{(n+p-1)}(x) \\ z_1^{(n+p)}(x) & \ldots & z_{i-1}^{(n+p1)}(x) & [F^{(p+1)}(x)+\varphi^{(p+1)}(x)] & z_{i+1}^{(n+p)}(x) & \ldots & z_{n+p+1}^{(n+p)}(x) \end{vmatrix}$$

по элементам i-го столбца.

Тогда решение уравнения (82) запишется

$$z(x)=\sum_{i=1}^{n+p+1}\overline{C_i}(x)z_i(x)\int^{x}\frac{\sum_{i=1}^{n+p+1}\overline{\Delta}_i(\eta)z_i(x)}{\overline{\Delta}(\eta)}[F^{(p+1)}(\eta)+\varphi^{(p+1)}(\eta)]d\eta. \quad (84)$$

Далее обнулим лишние произвольные постоянные

$C_{n+1}=C_{n+1}=\ldots=C_{\,n+p+1}=0$,

найдем $P_m[z(y)]$: $P_m[z(y)]=$

$$=\sum_{i=1}^{n}C_iP_m[z_i(y)]+\int^{y}\frac{\sum_{i=1}^{n+p+1}\overline{\Delta_i}(\eta)P_m[z(y)]}{\overline{\Delta}(\eta)}[F^{(p+1)}(\eta)+\varphi^{(p+1)}(\eta)]d\eta$$

и, вводя обозначения для известных выражений

$$g(y)=\sum_{i=1}^{n}C_iP_m[z_i(y)],\quad \overline{H}(x,y)=\sum_{i-1}^{n+p+1}\overline{\Delta}_i(\eta)P_m[z_i(y)] \qquad (85)$$

придем к разрешающему интегродифференциальному уравнению

$$F(x)+\varphi(x)+$$
$$+\lambda\int_a^b\left[g(y)+\int^{y}\frac{\overline{\overline{H}}(\eta,y)}{\overline{\overline{\Delta}}(\eta)}[F^{(p+1)}(\eta)+\varphi^{(p+1)}(\eta)]\ d\eta\right]K(x,y)dy=\varphi(x). \quad (86)$$

Продифференцировав уравнение (86) (p+1) раз , преобразуем его в интегральное уравнение специального вида

$$F^{(p+1)}(x)+$$
$$+\lambda\int_a^b\left[G(y)+\int^{y}\frac{\overline{\overline{H}}(\eta,y)}{\overline{\overline{\Delta}}(\eta)}F^{(p+1)}(\eta)d\eta\right]\frac{\partial^{(p+1)}K(x,y)}{\partial x^{(p+1)}}dy=0, \quad (87)$$

где $G(y)=g(y)+\int^{y}\frac{\overline{H}(\eta,y)}{\overline{\Delta}(\eta)}\varphi^{p+1}(\eta)d\eta.$

Подставив найденное выражение $F^{(p+1)}(x)$ в формулу (84) получим общее решение уравнения (77) в случае $n\le m$.

4. Решение задачи Коши при n≤m для неоднородных уравнений

Рассмотрим уравнение (77) с начальными условиями $z^{(i)}(x_0)=z_0^{(i)}$, $i=\overline{0,n-1}$. В этом случае, как мы видели в п.2 § 4, задача сильно усложняется даже в случае однородных уравнений. Поэтому для решения задачи Коши в этом случае рациональнее сначала найти общее решение, а затем, используя начальные данные, определить постоянные.

Задачи к главе I

1. Найти общее решение уравнений:

1.1. $z''-2z'+z+\lambda\int\limits_0^1 yz(y)dy=0,$

1.2. $z''+z'-\lambda\int\limits_0^1 xz'(y)dy=0,$

1.3. $z''-z-\lambda\int\limits_0^1 xyz(y)dy=0,$

1.4. $z''-\lambda\int\limits_0^1 x[z''(y)-z(y)]dy=0,$

1.5. $z''-\lambda\int\limits_0^1 x[z'(y)+z(y)]dy=x,$

1.6. $z''-\lambda\int\limits_0^1 x[z''(y)+z(y)]dy=x.$

2. Решить задачи Коши:

2.1. $\begin{cases} z''+2z'=\lambda\int\limits_0^1 xz(y)dy, \\ z(0)=1, z'(0)=0. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} z''-z=\lambda\int\limits_0^1 x^2 z(y)dy, \\ z(0)=1, z'(0)=0. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} z''-z'=\lambda\int\limits_0^1 xyz(y)dy, \\ z(0)=0, z'(0)=1. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} z''-\lambda\int\limits_0^1 x[z'(y)+z(y)]dy=x, \\ z(0)=1, z'(0)=0. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} z''-\lambda\int\limits_0^1 x[z''(y)+z(y)]dy=x, \\ z(0)=1, z'(0)=0. \end{cases}$

3. Найти решение специализированных задач Коши:

3.1. $z''+2z'-\lambda\int\limits_0^1 xz(y)dy=0,$ если $z(0)=1, z'(0)=?$

3.2. $z''+z'-\lambda\int\limits_0^1 xz'(y)dy=0,$ если $z(0)=1, z'(0)=?$

3.3. $z''-z'-\lambda\int\limits_0^1 xyz(y)dy=0,$ если $z(0)=0, z'(0)=?$

4. Выяснить, имеют ли решения при характеристических значениях λ уравнения:

4.1. $z''+z'=\lambda\int\limits_0^1 xz'(y)dy,$

4.2. $z''-z=\lambda\int\limits_0^1 x^2 z(y)dy.$

Глава II.

Решение линейных интегродифференциальных уравнений Фредгольма с использованием фундаментальной системы решений внутреннего дифференциального оператора

§1. Постановка задачи и формулы для производных

Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$L_n\left[z(x)\right]+\lambda\int_a^b K(x,y)P_m\left[z(y)\right]dy=0\,, \tag{1}$$

где

$$L_n\left[z(x)\right]=z^{(n)}+a_1(x)z^{(n-1)}(x)+...+a_{n-1}(x)z'(x)+a_n(x)z(x)\,,$$

$$P_m\left[z(y)\right]=b_0(y)z^{(m)}(y)+b_1(y)z^{(m-1)}(y)+...+b_{m-1}(y)z'(y)+b_m(y)z(y)\,.$$

Будем искать решение уравнения (1), исходя из фундаментальной системы решений внутреннего дифференциального оператора, для этого положим

$$P_m\left[z(y)\right]=F(y)\,, \tag{2}$$

где $F(y)$ – пока неизвестная функция. Пусть решение соответствующего однородного уравнения $P_m\left[z(y)\right]=0$ найдено

$$z(y)=C_1z_1(y)+C_2z_2(y)+...+C_mz_m(y)\,.$$

Методом вариации произвольной постоянной находим решение уравнения (2), решив систему

$$\begin{cases} C_1'(y)z_1(y)+C_2'(y)z_2(y)+...+C_m'(y)z_m(y)=0, \\ C_1'(y)z_1'(y)+C_2'(y)z_2'(y)+...+C_m'(y)z_m'(y)=0, \\ .... \\ C_1'(y)z_1^{(m-1)}(y)+C_2'(y)z_2^{(m-1)}(y)+...+C_m'(y)z_m^{(m-1)}(y)=F(y). \end{cases} \tag{3}$$

Решение системы (3) существует и при том единственное, т.к. определитель этой системы есть определитель Вронского для фундаментальной системы решений уравнения $P_m\left[z(y)\right]=0$, а потому отличен от нуля. Следовательно,

$$C_i'(y)=\frac{\begin{vmatrix} z_1(y) & \dots & z_{i-1}(y) & 0 & z_{i+1}(y) & \dots & z_m(y) \\ z_1'(y) & \dots & z_{i-1}'(y) & 0 & z_{i+1}'(y) & \dots & z_m'(y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(m-1)}(y) & \dots & z_{i-1}^{(m-1)}(y) & F(y) & z_{i+1}^{(m-1)}(y) & \dots & z_m^{(m-1)}(y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1(y) & z_2(y) & \dots & z_m(y) \\ z_1'(y) & z_2'(y) & \dots & z_m'(y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(m-1)}(y) & z_2^{(m-1)}(y) & \dots & z_m^{(m-1)}(y) \end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{W_i(y)}{W(y)}F(y)\,,$$

где $W(y)$ – определитель Вронского, $W_i(y)$ – его миноры, взятые с их знаками. Интегрируя, находим коэффициенты

$$C_i(y)=\int^{y}\frac{W_i(\eta)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta+C_i\,,$$

где значок y над интегралом означает, что после интегрирования переменная η должна быть заменена на y. Тогда решение уравнения (2) запишется в виде

$$z(y)=\sum_{i=1}^{m}C_iz_i(y)+\int^{y}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i(y)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta\,. \qquad (4)$$

Будем искать решение уравнения (1) в форме (4), для этого найдем производные этого решения до m-го порядка включительно

$$z'(y)=\sum_{i=1}^{m}C_iz_i'(y)+\int^{y}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i'(y)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta+\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(y)z_i(y)}{W(y)}F(y)\,.$$

Учитывая, что $\dfrac{W_i(y)}{W(y)}F(y)=C_i'(y)$ и первое из уравнений системы (3), видим, что последнее слагаемое равняется нулю, и производная перепишется

$$z'(y)=\sum_{i=1}^{m}C_iz_i'(y)+\int^{y}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i'(y)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta\,. \qquad (4.1)$$

Так будет до $(m-1)$ производной включительно:

$$z''(y)=\sum_{i=1}^{m}C_i z_i''(y)+\int^{y}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i''(y)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta\,, \tag{4.2}$$

………………………………………………….

$$z^{(m-1)}(y)=\sum_{i=1}^{m}C_i z_i^{(m-1)}(y)+\int^{y}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i^{(m-1)}(y)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta \tag{4.$m-1$}$$

и, учитывая последнее равенство системы (3), найдем

$$z^{(m)}(y)=\sum_{i=1}^{m}C_i z_i^{(m)}(y)+\int^{y}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i^{(m)}(y)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta+F(y)\,. \tag{4.m}$$

Производные более высокого порядка $z^{(m+p)}(y)$ определятся дифференцированием (4.m), при $p=1,2,...$.

§2. Задача Коши при совпадении порядков внешнего и внутреннего дифференциальных операторов

Рассмотрим при $m=n$ задачу Коши для уравнения (1). Пусть даны начальные условия

$$z^{(s)}(x_0)=z_0^{(s)};\ \ (s=\overline{0,n-1})\,. \tag{5}$$

Учитывая предыдущие выкладки, решение будем искать в виде:

$$z(x)=\sum_{i=1}^{m}C_i z_i(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i(x)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta\,, \tag{6.0}$$

$$z'(x)=\sum_{i=1}^{m}C_i z_i'(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i'(x)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta\,, \tag{6.1}$$

……………………………………………….

$$z^{(m-1)}(x)=\sum_{i=1}^{m}C_i z_i^{(m-1)}(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i^{(m-1)}(x)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta\,, \tag{6.$m-1$}$$

$$z^{(m)}(x)=\sum_{i=1}^{m}C_i z_i^{(m)}(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i^{(m)}(x)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta+F(x). \qquad (6.m)$$

Подставляя начальные данные в выражения (6.0)-($6.m-1$) получим для определения коэффициентов систему

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}C_i z_i(x_0)=z_0^{(0)},\\ \sum_{i=1}^{m}C_i z_i'(x_0)=z_0',\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum_{i=1}^{m}C_i z_i^{(m-1)}(x_0)=z_0^{(m-1)}\end{cases} \qquad (7)$$

m уравнений с m неизвестными, решение которой существует и притом единственное, т.к. определитель этой системы $W(x_0)\neq 0$.

$$C_i=\frac{\begin{vmatrix} z_1(x_0) & \dots & z_{i-1}(x_0) & z_0^{(0)} & z_{i+1}(x_0) & \dots & z_m(x_0)\\ z_1'(x_0) & \dots & z_{i-1}'(x_0) & z_0' & z_{i+1}'(x_0) & \dots & z_m'(x_0)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ z_1^{(m-1)}(x_0) & \dots & z_{i-1}^{(m-1)}(x_0) & z_0^{(m-1)} & z_{i+1}^{(m-1)}(x_0) & \dots & z_m^{(m-1)}(x_0)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1(x_0) & z_2(x_0) & \dots & z_m(x_0)\\ z_1'(x_0) & z_2'(x_0) & \dots & z_m'(x_0)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ z_1^{(m-1)}(x_0) & z_2^{(m-1)}(x_0) & \dots & z_m^{(m-1)}(x_0)\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{\Delta_i(x_0)}{W(x_0)}, \qquad (8)$$

где $W(x_0)$ – значение определителя Вронского в точке x_0, а $\Delta_i(x_0)$ получен из $W(x_0)$ заменой i-го столбца начальными данными. Тогда (6.0)-(6.m) перепишутся:

$$z(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_i(x_0)}{W(x_0)}z_i(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i(x)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta, \qquad (9.0)$$

$$z'(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_i(x_0)}{W(x_0)}z_i'(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i'(x)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta\,, \tag{9.1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z^{(m-1)}(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_i(x_0)}{W(x_0)}z_i^{(m-1)}(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i^{(m-1)}(x)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta\,, \tag{9.m-1}$$

$$z^{(m)}(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_i(x_0)}{W(x_0)}z_i^{(m)}(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i^{(m)}(x)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta+F(x)\,. \tag{9.m}$$

Определим функцию $F(\eta)$ так, чтобы функция (9.0) была решением уравнения (1). Для этого подставим выражения (9.0)-(9.m) в уравнение (1)

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_i(x_0)}{W(x_0)}z_i^{(m)}(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i^{(m)}(x)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta+F(x)+$$

$$+a_1(x)\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_i(x_0)}{W(x_0)}z_i^{(m-1)}(x)+a_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i^{(m-1)}(x)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta+\ldots+$$

$$+a_n(x)\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_i(x_0)}{W(x_0)}z_i(x)+a_n(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i(x)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta+$$

$$+\lambda\int_a^b K(x,y)F(y)dy=0$$

и, группируя, получим

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_i(x_0)}{W(x_0)}L_n[z_i(x)]+F(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)L_n[z_i(x)]}{W(\eta)}F(\eta)d\eta+$$

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_i(x_0)}{W(x_0)}L_n[z_i(x)]+F(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)L_n[z_i(x)]}{W(\eta)}F(\eta)d\eta+$$

$$+\lambda\int_a^b K(x,y)F(y)dy=0\ .$$

Обозначив известные выражения

$$g(x)=-\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_i(x_0)}{W(x_0)}L_n\left[z_i(x)\right]\ \text{и}\ H(\eta,x)=-\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)L_n[z_i(x)]}{W(\eta)}$$

получим для уравнения (1) разрешающее интегральное уравнение смешанного типа Вольтерра-Фридгольма

$$F(x)=g(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)F(y)dy+\int_{x_0}^{x}H(\eta,x)F(\eta)d\eta\ . \qquad (10)$$

Рассмотрим уравнение более общего вида

$$F(x)=g(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)F(y)dy+\mu\int_{x_0}^{x}H(\eta,x)F(\eta)d\eta\ , \qquad (11)$$

решение которого будем искать в форме ряда по целым степеням параметра λ

$$F(x)=\varphi_0(x,\mu)+\varphi_1(x,\mu)\lambda+\varphi_2(x,\mu)\lambda^2+...+\varphi_k(x,\mu)\lambda^k+...\ , \qquad (12)$$

где коэффициенты ряда $\varphi_\kappa(x,\mu)$ $(k=0,1,...)$ – функции переменной x и одновременно зависят от параметра μ. Подставляя ряд (12) в уравнение (11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим интегральные уравнения Вольтерра второго рода

$$\varphi_0(x,\mu)=g(x)+\mu\int_{x_0}^{x}H(\eta,x)\varphi_0(\eta,\mu)d\eta\ . \qquad (13)$$

Если $\Gamma(\eta,x;\mu)$ – резольвента ядра уравнения (13), то его решение будет иметь вид

$$\varphi_0(x,\mu)=g(x)+\mu\int_{x_0}^{x}\Gamma(\eta,x;\mu)g(\eta)d\eta\ . \qquad (14)$$

Аналогично получим уравнение для $\varphi_1(x,\mu)$

$$\varphi_1(x,\mu)=\int_a^b K(x,y)\varphi_0(y)dy+\mu\int_{x_0}^x H(\eta,x)\varphi_1(\eta,\mu)d\eta\,.$$

Положим

$$g_1(x)=\int_a^b K(x,y)\varphi_0(y,\mu)dy\,, \tag{15.1}$$

то

$$\varphi_1(x,\mu)=g_1(x)+\mu\int_{x_0}^x H(\eta,x)\varphi_1(\eta,\mu)d\eta\,. \tag{13.1}$$

Так как ядро этого уравнения то же, что и уравнения (13), то его решение запишется

$$\varphi_1(x,\mu)=g_1(x)+\mu\int_{x_0}^x \Gamma(\eta,x;\mu)g_1(\eta)d\eta\,. \tag{14.1}$$

Аналогично определяются и следующие коэффициенты ряда (12)

$$\varphi_k(x,\mu)=g_k(x)+\mu\int_{x_0}^x \Gamma(\eta,x,\mu)g_k(\eta)d\eta\,, \tag{14.к}$$

где

$$g_k(x)=\int_a^b K(x,y)\varphi_{k-1}(y;\mu)dy\,, \tag{15.к}$$

при $k=0,1,2,...$.

Найденные выражения коэффициентов (14.0), …, (14.к), … подставляем в ряд (12) и, группируя, получим

$$F(x)=g(x)+\lambda g_1(x)+\lambda^2 g_2(x)+...+\lambda^k g_k(x)+...+$$

$$+\mu\int_{x_0}^x \Gamma(\eta,x;\mu)\left[g(\eta)+\lambda g_1(\eta)+\lambda^2 g_2(\eta)+...+\lambda^k g_k(\eta)+...\right]d\eta\,. \tag{16}$$

Запишем рекуррентные формулы для функций $g_i(x)$, $(i=1,2,...)$:

$$g_1(x)=\int_a^b K(x,y)\varphi_0(y;\mu)dy=$$

$$=\int_a^b K(x,y)\left[g(y)+\mu\int_{x_0}^y \Gamma(\eta,y;\mu)g(\eta)d\eta\right]dy=$$

$$=\int_a^b K(x,y)g(y)dy+\mu\int_a^b K(x,y)\int_{x_0}^{y}\Gamma(\eta,y;\mu)g(\eta)d\eta dy\,,$$

$$g_2(x)=\int_a^b K(x,y)g_1(y)dy+\mu\int_a^b K(x,y)\int_{x_0}^{y}\Gamma(\eta,y;\mu)g_1(\eta)d\eta dy\,,$$

…………………………………………………………….

$$g_k(x)=\int_a^b K(x,y)g_{k-1}(y)dy+\mu\int_a^b K(x,y)\int_{x_0}^{y}\Gamma(\eta,y;\mu)g_{k-1}(\eta)d\eta dy\,,\quad(17)$$

…………………………………………………………..

Для достаточно малых λ докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (12), для этого положим $|g(x)|\le g$; $|\Gamma(\eta,x;\mu)|\le\Gamma$; $|K(x,y)|\le K\quad\forall x,\eta,y:\ a\le x\le b;\ x_0\le\eta\le y;\ a\le y\le b$ и из формул (14.0), … , (14.к), … найдем

$$|\varphi_0(x,\mu)|=\left|g(x)+\mu\int_{x_0}^{x}\Gamma(\eta,x;\mu)g(\eta)d\eta\right|\le$$

$$\le\left|g+\mu\int_{x_0}^{x}\Gamma g d\eta\right|\le g(1+|\mu|\,\Gamma\,|b-a|)\,,$$

$$|\varphi_1(x,\mu)|=\left|g_1(x)+\mu\int_{x_0}^{x}\Gamma(\eta,x;\mu)g_1(\eta)d\eta\right|\le$$

$$\le\left|\int_a^b K(g+\mu\Gamma g|b-a|)dy+\mu\int_{x_0}^{x}\Gamma\int_a^b K(g+\mu\Gamma g|b-a|)dyd\eta\right|\le$$

$$\le\left|K(g+\mu\Gamma g|b-a|)|b-a|+\mu\Gamma K(g+\mu\Gamma g|b-a|)|b-a|^2\right|=$$

$$=Kg(1+|\mu|\,\Gamma\,|b-a|)^2\,|b-a|\,,$$

$$|\varphi_2(x,\mu)|\le\left|\int_a^b K\cdot Kg(1+\mu\Gamma|b-a|)^2|b-a|dy+\right.$$

$$\left.+\mu\int_{x_0}^{x}\Gamma\int_a^b K^2g(1+\mu\Gamma|b-a|)^2|b-a|dyd\eta\right|\le$$

$$\le\left|K^2g(1+\mu\Gamma|b-a|)^2|b-a|^2+\mu\Gamma K^2g(1+\mu\Gamma|b-a|)^2|b-a|^3\right|=$$

$$= K^2 g(1+|\mu|\Gamma|b-a|)^3 |b-a|^2 ,$$

…………………………………………………………………………

$$|\varphi_k(x,\mu)| \le K^k g(1+|\mu|\Gamma|b-a|)^{k+1} |b-a|^k \ ; \ \ k = 0,1,2,\dots \ .$$

Из полученных оценок составляем мажорирующий ряд для ряда (12)

$$g(1+|\mu|\Gamma|b-a|) + \lambda K g(1+|\mu|\Gamma|b-a|)^2 |b-a| + \dots +$$
$$+ \lambda^k K^k g(1+|\mu|\Gamma|b-a|)^{k+1} |b-a|^k + \dots \ .$$

Этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\lambda K(1+|\mu|\Gamma|b-a|)|b-a|$ и сходится при $|\lambda K(1+|\mu|\times \times\Gamma|b-a|)|b-a| \ |<1$, т.е. для

$$|\lambda| < \frac{1}{K(1+|\mu|\Gamma|b-a|)|b-a|} \ . \qquad (18)$$

Следовательно, ряд (12) сходится равномерно и абсолютно для этих значений λ и решение разрешающего уравнения (10) можно переписать в виде

$$F(x) = G(x,\lambda) + \int_{x_0}^{x} \Gamma(\eta, x, \mu) G(\eta, \lambda) d\eta \ , \qquad (19)$$

где

$$G(x,\lambda) = g(x) + g_1(x)\lambda + g_2(x)\lambda^2 + \dots + g_k(x)\lambda^k + \dots \ .$$

Подставляя $F(x)$ (19) в выражение $z(x)$ (9), найдем решение исходного интегродифференциального уравнения.

Самостоятельно рассмотреть другой возможный вариант решения в виде ряда по степеням параметра μ – тема курсовой работы.

Пример 1.

Решим задачу Коши для интегродифференциального уравнения

$$z'(x) + z(x) + \lambda \int_0^1 [z'(y) + z(y)] y dy = 0$$

с начальными условиями $z(x_0) = z_0$.

Общее решение уравнения $z'(x) + z(x) = F(x)$ запишется

$$z(x) = e^{-x}(C + \int^{x} e^{\eta} F(\eta) d\eta) \ ,$$

откуда при заданных начальных условиях находим *C*:

$$z_0 = e^{-x_0}(C + \int_{x_0}^{x_0} e^{\eta} F(\eta) d\eta) \;,\; C = z_0 e^{x_0} .$$

Тогда решение перепишется

$$z(x) = z_0 e^{x_0 - x} + e^{-x} \int_{x_0}^{x} e^{\eta} F(\eta) d\eta \;. \qquad (*)$$

Затем найдем производную решения

$$z'(x) = -z_0 e^{x_0 - x} - e^{-x} \int_{x_0}^{x} e^{\eta} F(\eta) d\eta + e^{-x} e^{x} F(x) =$$

$$= -z_0 e^{x_0 - x} - e^{-x} \int_{x_0}^{x} e^{\eta} F(\eta) d\eta + F(x)$$

и, подставив $z(x)$ и $z'(x)$ в исходное уравнение

$$-z_0 e^{x_0 - x} - e^{-x} \int_{x_0}^{x} e^{\eta} F(\eta) d\eta + F(x) - z_0 e^{x_0 - x} -$$

$$-e^{-x} \int_{x_0}^{x} e^{\eta} F(\eta) d\eta + \lambda \int_0^1 F(y) y dy = 0 \,,$$

$$-2z_0 e^{x_0 - x} + F(x) - 2e^{-x} \int_{x_0}^{x} e^{\eta} F(\eta) d\eta + \lambda \int_0^1 y F(y) dy = 0 \,,$$

получим разрешающее уравнение

$$F(x) = 2z_0 e^{x_0 - x} + 2\int_{x_0}^{x} e^{\eta - x} F(\eta) d\eta + \lambda \int_0^1 y F(y) dy \,,$$

где $g(x) = 2z_0 e^{x_0 - x}$, $K(x, y) = y$, $H(\eta, x) = 2e^{\eta - x}$, $\mu = 1$.

Найдем резольвенту $\Gamma(\eta, x, \mu)$ ядра $H(\eta, x)$, для этого определим сначала итерированные ядра

$$H_2(\eta, x) = \int_{\eta}^{x} 2e^{s-x} \cdot 2e^{\eta - s} ds = \frac{2^2}{1!} e^{\eta - x}(x - \eta) \,,$$

$$H_3(\eta, x) = \int_{\eta}^{x} 2e^{s-x} \cdot 2^2 e^{\eta - s}(s - \eta) ds = \frac{2^3}{2!} e^{\eta - x}(x - \eta)^2 \,,$$

……………………………………………………

$$H_k(\eta,x)=\frac{2^k}{(k-1)!}e^{\eta-x}(x-\eta)^{k-1}.$$

……………………………………………………….

Учитывая, что $\Gamma(\eta,x;1)=H(\eta,x)+H_2(\eta,x)+\ldots+H_k(\eta,x)+\ldots$, найдем $\Gamma(\eta,x;1)=2e^{\eta-x}\left[1+\frac{2(x-\eta)}{1!}+\frac{2^2(x-\eta)^2}{2!}+\ldots+\frac{2^k(x-\eta)^k}{k!}+\ldots\right]$,

т.е.

$$\Gamma(\eta,x;1)=2e^{\eta-x}\cdot e^{2(x-\eta)}=2e^{x-\eta}.$$

Далее находим коэффициенты ряда (12) по формулам (14.0), …., (14.к), …

$$\varphi_0(x)=2z_0e^{x_0-x}+\int_{x_0}^{x}2e^{x-\eta}\cdot 2z_0e^{x_0-\eta}d\eta=2z_0e^{x_0-x}+4z_0\int_{x_0}^{x}e^{x+x_0-2\eta}d\eta,$$

$$\varphi_0(x)=2z_0e^{x_0-x}+4z_0\frac{e^{x+x_0-2x}}{-2}-4z_0\frac{e^{x+x_0-2x_0}}{-2}=2z_0e^{x_0-x}.$$

По формуле (15.1) получим

$$g_1(x)=-\int_0^1 y\varphi_0(y)dy=-\int_0^1 y2z_0e^{y-x_0}dy=-2z_0e^{-x_0}\int_0^1 ye^y dy=-2z_0e^{-x_0}.$$

И затем по формуле (14.1) определим $\varphi_1(x)$

$$\varphi_1(x)=-2z_0e^{-x_0}+\int_{x_0}^{x}2e^{x-\eta}(-2z_0e^{-x_0})d\eta=$$

$$=-2z_0e^{-x_0}-4z_0e^{-x_0}\int_{x_0}^{x}e^{x-\eta}d\eta=2z_0e^{-x_0}(1-2e^{x-x_0}).$$

Аналогично находим $g_2(x)$ по формуле (15.к) при к=2 и т.д.

$$g_2(x)=-2z_0e^{-x_0}\int_0^1(y-2ye^{y-x_0})dy=$$

$$=-2z_0e^{-x_0}\left[\frac{y^2}{2}-2e^{y-x_0}(y-1)\right]\Big|_0^1=2z_0e^{-x_0}(2e^{-x_0}-\frac{1}{2}),$$

$$\varphi_2(x)=z_0e^{-x_0}(4e^{-x_0}-1)+\int_{x_0}^{x}2e^{x-\eta}\cdot z_0e^{-x_0}(4e^{-x_0}-1)d\eta=$$

$$= -2z_0 e^{-x_0}(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})(1 - 2e^{x-x_0}),$$

$$g_3(x) = -\int_0^1 y\left[-2z_0 e^{-x_0}(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})(1 - 2e^{y-x_0})\right]dy =$$

$$= 2z_0 e^{-x_0}(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})\int_0^1 (y - 2ye^{y-x_0})dy = -2z_0 e^{-x_0}(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})^2,$$

$$\varphi_3(x) = 2z_0 e^{-x_0}(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})^2(1 - 2e^{x-x_0}),$$

…………………………………………………………………

$$\varphi_n(x) = (-1)^{n-1} 2z_0 e^{-x_0}(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})^{n-1}(1 - 2e^{x-x_0}),$$

……………………………………………………………………….

Подставив найденные коэффициенты в ряд (12), найдем

$$F(x) = 2z_0 e^{x-x_0} + \lambda 2z_0 e^{-x_0}(1 - 2e^{x-x_0}) -$$

$$-\lambda^2 2z_0 e^{-x_0}(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})(1 - 2e^{x-x_0}) + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1}\lambda^n 2z_0 e^{-x_0}(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})^{n-1}(1 - 2e^{x-x_0}) + \ldots =$$

$$= 2z_0 e^{-x_0}\left\{e^x + \lambda(1 - 2e^{x-x_0})\left[1 - \lambda(2e^{-x_0} - \frac{1}{2}) + \ldots +\right.\right.$$

$$\left.\left. +(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})^{n-1} + \ldots\right]\right\} =$$

$$= 2z_0 e^{-x_0}\left[e^x + \frac{\lambda(1 - 2e^{x-x_0})}{1 + \lambda(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})}\right], \text{ для } |\lambda| < \frac{1}{2e^{-x_0} - \frac{1}{2}}.$$

И подставив полученное значение $F(x)$ в решение (*) определим $z(x)$:

$$z(x) = z_0 e^{x_0 - x} + e^{-x}\int_{x_0}^{x} e^{\eta} F(\eta)d\eta =$$

$$= z_0 e^{x_0 - x} + e^{-x} \int\limits_{x_0}^{x} e^{\eta} 2z_0 e^{-x_0} \left[e^{\eta} + \frac{\lambda(1 - 2e^{\eta - x_0})}{1 + \lambda(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})} \right] d\eta = z_0 e^{x_0 - x} + 2z_0 e^{-x_0 - x} \times$$

$$\times \int\limits_{x_0}^{x} \left[e^{2\eta} + \frac{\lambda(e^{\eta} - 2e^{2\eta - x_0})}{1 + \lambda(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})} \right] d\eta = z_0 e^{x_0 - x} +$$

$$+ 2z_0 e^{-x_0 - x} \left[\frac{1}{2} e^{2\eta} + \frac{\lambda(e^{\eta} - e^{2\eta - x_0})}{1 + \lambda(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})} \right] \Bigg|_{x_0}^{x} =$$

$$= z_0 e^{x_0 - x} + 2z_0 e^{-x_0 - x} \left[\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{\lambda(e^{x} - e^{2x - x_0})}{1 + \lambda(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})} - \frac{1}{2} e^{2x_0} - \frac{\lambda(e^{x_0} - e^{x_0})}{1 + \lambda(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})} \right] =$$

$$= z_0 e^{x_0 - x} + 2z_0 e^{-x_0 - x} \left[\frac{1}{2}(e^{2x} - e^{2x_0}) + \frac{\lambda}{1 + \lambda(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})}(e^{x} - e^{2x - x_0}) \right],$$

$$z(x) = z_0 e^{x_0 - x} + 2z_0 \left[\frac{1}{2}(e^{x - x_0} - e^{x_0 - x}) + \frac{\lambda}{1 + \lambda(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})}(e^{-x_0} - e^{x - 2x_0}) \right].$$

Сделаем проверку:

$$z'(x) = -z_0 e^{x_0 - x} + 2z_0 \left[\frac{1}{2}(e^{x - x_0} + e^{x_0 - x}) - \frac{\lambda}{1 + \lambda(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})} e^{x - 2x_0} \right],$$

$$z'(x) - z(x) = -2z_0 e^{x_0 - x} + 2z_0 e^{x_0 - x} - \frac{2z_0 \lambda}{1 + \lambda(2e^{-x_0} - \frac{1}{2})} e^{-x_0} =$$

$$= -\frac{2z_0\lambda e^{-x_0}}{1+\lambda(2e^{-x_0}-\frac{1}{2})}\,, \qquad \int_0^1 y\left\{2z_0\left[e^{y-x_0}+\frac{\lambda(e^{-x_0}-2e^{y-2x_0})}{1+\lambda(2e^{-x_0}-\frac{1}{2})}\right]^2\right\}dy =$$

$$= 2z_0 e^{-x_0}\int_0^1\left[ye^y+\frac{\lambda(y-2ye^{y-x_0})}{1+\lambda(2e^{-x_0}-\frac{1}{2})}\right]dy =$$

$$= 2z_0 e^{-x_0}\left[e^y(y-1)+\frac{\lambda}{1+\lambda(2e^{-x_0}-\frac{1}{2})}\left(\frac{y^2}{2}-2e^{y-x_0}(y-1)\right)\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2z_0 e^{-x_0}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda(2e^{-x_0}-\frac{1}{2})}+1-\frac{2\lambda e^{-x_0}}{1+\lambda(2e^{-x_0}-\frac{1}{2})}\right] =$$

$$= 2z_0 e^{-x_0}\,\frac{\lambda+2+4\lambda e^{-x_0}-\lambda-4\lambda e^{-x_0}}{2(1+\lambda(2e^{-x_0}-\frac{1}{2}))} = \frac{2z_0 e^{-x_0}}{1+\lambda(2e^{-x_0}-\frac{1}{2})}$$

и, следовательно, $-\dfrac{2z_0 e^{-x_0}}{1+\lambda(2e^{-x_0}-\frac{1}{2})}+\dfrac{2z_0 e^{-x_0}}{1+\lambda(2e^{-x_0}-\frac{1}{2})}=0$, т.е. имеем тождество.

§3. Задача Коши для случая, когда порядок внутреннего дифференциального оператора больше порядка внешнего

Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения (1), в случае $m > n$. Пусть $m = n + p$, где $p > 0$. Решение уравнения (1) будем искать, исходя из фундаментальной системы решений внутреннего дифференциального оператора, т.е. в виде

$$z(x)=\sum_{i=1}^{m} C_i z_i(x)+\int_{x_0}^{x} \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i(\eta) z_i(x)}{W(\eta)} F(\eta) d\eta\ . \tag{6.0}$$

Вычислив производные

$$z'(x)=\sum_{i=1}^{m} C_i z_i'(x)+\int_{x_0}^{x} \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i(\eta) z_i'(x)}{W(\eta)} F(\eta) d\eta\ , \tag{6.1}$$

....

$$z^{(m-1)}(x)=\sum_{i=1}^{m} C_i z_i^{(m-1)}(x)+\int^{y} \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i(\eta) z_i^{(m-1)}(x)}{W(\eta)} F(\eta) d\eta\ , \tag{6.$m-1$}$$

$$z^{(m)}(x)=\sum_{i=1}^{m} C_i z_i^{(m)}(x)+\int_{x_0}^{x} \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i(\eta) z_i^{(m)}(x)}{W(\eta)} F(\eta) d\eta + F(x) \tag{6.m}$$

и подставив начальные данные в (6.0)-(6.*m*–1), получим систему

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} C_i z_i(x_0) = z_0^{(0)}, \\ \sum_{i=1}^{m} C_i z_i'(x_0) = z_0', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{m} C_i z_i^{(n-1)}(x_0) = z_0^{(n-1)} \end{cases}$$

n уравнений с m неизвестными постоянными. Из составленной системы можно выразить n постоянных через остальные p, которые пока оставим произвольными, а в дальнейшем распорядимся ими при нахождении функции $F(x)$. Для этого в уравнениях системы перенесем слагаемые с C_{n+1}, ..., C_{n+p} в правую часть

$$
\begin{cases}
C_1 z_1(x_0) + C_2 z_2(x_0) + \ldots + C_n z_n(x_0) = \\
= z_0 - C_{n+1} z_{n+1}(x_0) - \ldots - C_{n+p} z_{n+p}(x_0) \ , \\
C_1 z_1'(x_0) + C_2 z_2'(x_0) + \ldots + C_n z_n'(x_0) = \\
= z_0' - C_{n+1} z_{n+1}'(x_0) - \ldots - C_{n+p} z_{n+p}'(x_0) \ , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
C_1 z_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 z_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n z_n^{(n-1)}(x_0) = \\
= z_0^{(n-1)} - C_{n+1} z_{n+1}^{(n-1)}(x_0) - \ldots - C_{n+p} z_{n+p}^{(n-1)}(x_0)
\end{cases}
\tag{20}
$$

и найдем C_i, $i = \overline{1,n}$: $C_i =$

$$
= \begin{vmatrix}
z_1(x_0) & \ldots & z_{i-1}(x_0) & \begin{bmatrix} z_0 - C_{n+1} z_{n+1}(x_0) - \\ - \ldots - C_{n+p} z_{n+p}(x_0) \end{bmatrix} & z_{i+1}(x_0) & \ldots & z_n(x_0) \\
z_1'(x_0) & \ldots & z_{i-1}'(x_0) & \begin{bmatrix} z_0' - C_{n+1} z_{n+1}'(x_0) - \\ - \ldots - C_{n+p} z_{n+p}'(x_0) \end{bmatrix} & z_{i+1}'(x_0) & \ldots & z_n'(x_0) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
z_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & z_{i-1}^{(n-1)}(x_0) & \begin{bmatrix} z_0^{(n-1)} - C_{n+1} z_{n+1}^{(n-1)}(x_0) - \\ - \ldots - C_{n+p} z_{n+p}^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} & z_{i+1}^{(n-1)}(x_0) & \ldots & z_n^{(n-1)}(x_0)
\end{vmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{vmatrix}
z_1(x_0) & z_2(x_0) & \ldots & z_n(x_0) \\
z_1'(x_0) & z_2'(x_0) & \ldots & z_n'(x_0) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
z_1^{(n-1)}(x_0) & z_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & z_n^{(n-1)}(x_0)
\end{vmatrix}^{-1} = \frac{\Delta_i^*(x_0)}{W^*(x_0)},
\tag{21}
$$

где $W^*(x_0)$ – значение функционального определителя в точке x_0, составленного из n функций фундаментальной системы решений внутреннего дифференциального оператора, а $\Delta_i^*(x_0)$ – определитель, составленный из $W^*(x_0)$ заменой i-го столбца столбцом из правых частей системы (20).

Распишем определители $\Delta_i^*(x_0)$ на сумму определителей:

$$\Delta_i^*(x)=\begin{vmatrix} z_1(x_0) & \dots & z_{i-1}(x_0) & z_0 & z_{i+1}(x_0) & \dots & z_n(x_0) \\ z_1'(x_0) & \dots & z_{i-1}'(x_0) & z_0' & z_{i+1}'(x_0) & \dots & z_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & z_{i-1}^{(n-1)}(x_0) & z_0^{(n-1)} & z_{i+1}^{(n-1)}(x_0) & \dots & z_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}-$$

$$-C_{n+1}\begin{vmatrix} z_1(x_0) & \dots & z_{i-1}(x_0) & z_{n+1}(x_0) & z_{i+1}(x_0) & \dots & z_n(x_0) \\ z_1'(x_0) & \dots & z_{i-1}'(x_0) & z_{n+1}'(x_0) & z_{i+1}'(x_0) & \dots & z_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & z_{i-1}^{(n-1)}(x_0) & z_{n+1}^{(n-1)}(x_0) & z_{i+1}^{(n-1)}(x_0) & \dots & z_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}-$$

…………………………………………………………………..

$$-C_{n+p}\begin{vmatrix} z_1(x_0) & \dots & z_{i-1}(x_0) & z_{n+p}(x_0) & z_{i+1}(x_0) & \dots & z_n(x_0) \\ z_1'(x_0) & \dots & z_{i-1}'(x_0) & z_{n+p}'(x_0) & z_{i+1}'(x_0) & \dots & z_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & z_{i-1}^{(n-1)}(x_0) & z_{n+p}^{(n-1)}(x_0) & z_{i+1}^{(n-1)}(x_0) & \dots & z_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}.$$

В последней сумме определители соответственно обозначим

$$\Delta_i^{10}(x_0),\ \Delta_i^{11}(x_0),\ \dots,\ \Delta_i^{1p}(x_0),$$

тогда

$$C_i=\frac{\Delta_i^{10}(x_0)-C_{n+1}\Delta_i^{11}(x_0)-\dots.-C_{n+p}\Delta_i^{1p}(x_0)}{W^*(x_0)},\quad i=\overline{1,n}. \tag{22}$$

Подставим значение C_i из (21) в (6.0)-(6.m):

$$z(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_i^*(x_0)}{W^*(x_0)}z_i(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i(x)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta,$$

$$z'(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_i^*(x_0)}{W^*(x_0)}z_i'(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i'(x)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta,$$

……………………………………………… (23)

$$z^{(m-1)}(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_i^*(x_0)}{W^*(x_0)}z_i^{(m-1)}(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\sum_{i=1}^{m}W_i(\eta)z_i^{(m-1)}(x)}{W(\eta)}F(\eta)d\eta,$$

$$z^{(m)}(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i^*(x_0)}{W^*(x_0)} z_i^{(m)}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i(\eta) z_i^{(m)}(x)}{W(\eta)} F(\eta) d\eta + F(x).$$

Далее вычислим

$$L_n\left[z(x)\right] = \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i^*(x_0)}{W^*(x_0)} z_i^{(n)}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i(\eta) z_i^{(n)}(x)}{W(\eta)} F(\eta) d\eta +$$

$$+a_1(x)\sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i^*(x_0)}{W^*(x_0)} z_i^{(n-1)}(x) \ +a_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i(\eta) z_i^{(n-1)}(x)}{W(\eta)} F(\eta) d\eta + \ldots +$$

$$+a_n(x)\sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i^*(x_0)}{W^*(x_0)} z_i(x) + a_n(x)\int_{x_0}^{x} \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i(\eta) z_i(x)}{W(\eta)} F(\eta) d\eta =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i^*(x_0)}{W^*(x_0)} L_n[z_i(x)] + \int_{x_0}^{x} \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i(\eta) L_n[z_i(x)]}{W(\eta)} F(\eta) d\eta =$$

$$= g(x) + \int_{x_0}^{x} H(\eta, x) F(\eta) d\eta,$$

где

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i^*(x_0)}{W^*(x_0)} L_n[z_i(x)], \quad H(\eta, x) = \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i(\eta) L_n[z_i(x)]}{W(\eta)}. \qquad (24)$$

Тогда разрешающее уравнение для уравнения (1) запишется

$$g(x) + \int_{x_0}^{x} H(\eta, x) F(\eta) d\eta + \lambda \int_{a}^{b} K(x, y) F(y) dy = 0.$$

Решим это разрешающее смешанное интегральное уравнение в более общем виде

$$g(x) + \mu \int_{x_0}^{x} H(\eta, x) F(\eta) d\eta + \lambda \int_{a}^{b} K(x, y) F(y) dy = 0. \qquad (25)$$

Сначала продифференцируем это уравнение и сведем его к уравнению вида (11)

$$g'(x) + \mu H(x,x)F(x) +$$
$$+\mu \int_{x_0}^{x} H'_x(\eta,x)F(\eta)d\eta + \lambda \int_a^b K'_x(x,y)F(y)dy = 0 . \qquad (26)$$

Считая, что $H(x,x) \neq 0$; $g(x)$, $H(\eta,x)$, $K(x,y)$ имеют непрерывные производные по x на $[a,b]$, и поделив (26) на $\mu H(x,x) \neq 0$, получим

$$F(x) = -\frac{g'(x)}{\mu H(x,x)} - \lambda \int_a^b \frac{K'_x(x,y)}{\mu H(x,x)} F(y)dy - \int_{x_0}^{x} \frac{H'_x(\eta,x)}{H(x,x)} F(\eta)d\eta .$$

Если же $H(x,x) = 0$, то можно еще раз продифференцировать и так до тех пор, пока $H^{(k-1)}_{x^{k-1}}(x,x) \neq 0$, после k –го дифференцирования. Введем обозначения

$$g^*(x) = -\frac{g'(x)}{\mu H(x,x)},\ K^*(x,y) = -\frac{K'_x(x,y)}{\mu H(x,x)},\ H^*(\eta,x) = -\frac{H'_x(\eta,x)}{H(x,x)}, \qquad (27)$$

тогда получим разрешающее уравнение вида (11)

$$F(x) = g^*(x) + \lambda \int_a^b K^*(x,y)F(y)dy + \int_{x_0}^{x} H^*(\eta,x)F(\eta)d\eta . \qquad (28)$$

Пусть $R(\eta,x,1)$ – резольвента ядра $H^*(\eta,x)$ при $\mu = 1$, тогда аналогично, как и ранее, получим

$$F(x) = G^*(x,\lambda) + \int_{x_0}^{x} R(\eta,x;1)\ G^*(\eta,\lambda)d\eta, \qquad (29)$$

где

$$G^*(x,\lambda) = g^*(x) + g_1^*(x)\lambda + g_2^*(x)\lambda^2 + ... + g_k^*(x)\lambda^k + ..., \qquad (30)$$

$$g_k^*(x) = \int_a^b K^*(x,y)\varphi_{k-1}(y)dy, \quad k = 1,2,..., \qquad (31)$$

$$\varphi_k(x,\mu) = g_k^*(x) + \int_{x_0}^{x} R(\eta,x;1)g_k^*(\eta)d\eta, \quad k = 1,2,... . \qquad (32)$$

Если положить $g_0^*(x) = g^*(x)$, то рекуррентные формулы для нахождения $g_k^*(x),\ k = 1,2,...$, запишутся

$$g_k^*(x) = \int_a^b K^*(x,y) g^*_{k-1}(y)dy +$$

$$+\mu \int_a^b K^*(x,y) \int_{x_0}^{x} R(\eta, y, 1) g^*_{k-1}(\eta) d\eta dy\,, \quad k = 1,2,\dots \,. \tag{33}$$

……………………………………….

Докажем, что ряд (30) сходится абсолютно и равномерно для достаточно малых значений λ. Для этого при $a \le x \le b$; $x_0 \le \eta \le y$; $a \le y \le b$, $\mu \ne 0$ наложим ограничения

$$\left| \frac{1}{\mu H(x,x)} \right| \le N\,; \quad |g'(x)| \le Q\,; \quad |K'_x(x,y)| \le M\,; \quad |R(\eta, y, 1)| \le R$$

и оценим по модулю коэффициенты ряда (30):

$$|g^*(x)| = \left| -\frac{g'(x)}{\mu H(x,x)} \right| \le QN.$$

Из формул (27) и (33) и наложенных ограничений, имеем

$$|g_1^*(x)| \le \left| \int_a^b MN \cdot QNdy + \mu \int_a^b MN \int_{x_0}^{y} RQNd\eta dy \right| \le$$

$$\le MN^2 Q|b-a|(1+|\mu|R|b-a|)\,,$$

$$|g_2^*(x)| \le \left| \int_a^b MN \cdot MN^2 Q|b-a|(1+|\mu|R|b-a|)dy + \right.$$

$$\left. +\mu \int_a^b MN \int_{x_0}^{y} RMN^2 Q|b-a|(1+|\mu|R|b-a|)d\eta dy \right| \le$$

$$\le M^2 N^3 Q|b-a|^2 (1+|\mu|R|b-a|) + |\mu| M^2 N^3 QR|b-a|^3 (1+|\mu|R|b-a|) =$$

$$= M^2 N^3 Q|b-a|^2 (1+|\mu|R|b-a|)^2\,,$$

……………………………………………………………..

$$|g_k^*(x)| \le M^k N^{k+1} Q|b-a|^k (1+|\mu|R|b-a|)^k\,,$$

…………………………………………………………….

Составляем для ряда (30) мажорирующий ряд

$$QN+\lambda MN^2Q|b-a|(1+|\mu|R|b-a|)+...+$$
$$+\lambda^k M^k N^{k+1}Q|b-a|^k(1+|\mu|R|b-a|)^k+...,$$

который, как ряд составленный из членов геометрической прогрессии, будет сходиться для

$$|\lambda|<\frac{1}{MNQ|b-a|(1+|\mu|R|b-a|)} \qquad (34)$$

и, следовательно, ряд (30) для этих значений λ будет сходиться абсолютно и равномерно.

В решение (29) войдут пока неопределенные постоянные C_{n+1}, C_{n+2}, ..., C_{n+p}, которыми распорядимся так, чтобы решение (29) удовлетворяло уравнению (25). Рассмотрим далее как это можно сделать, для этого выпишем $g(x)$ и подставим C_i, $i=\overline{1,n}$ из (22):

$$g(x)=\sum_{i=1}^{m}C_iL_n\left[z_i(x)\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_i^{10}(x_0)-C_{n+1}\Delta_i^{11}(x_0)-....-C_{n+p}\Delta_i^{1p}(x_0)}{W^*(x_0)}L_n\left[z_i(x)\right]+$$
$$+\sum_{i=n+1}^{m}C_iL_n\left[z_i(x)\right]+...=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_i^{10}(x_0)}{W^*(x_0)}L_n\left[z_i(x)\right]+C_{n+1}\left\{L_n\left[z_{n+1}(x)\right]-\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_i^{11}(x_0)}{W^*(x_0)}L_n\left[z_i(x)\right]\right\}+...+$$
$$+C_{n+p}\left\{L_n\left[z_{n+p}(x)\right]-\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_i^{1p}(x_0)}{W^*(x_0)}L_n\left[z_i(x)\right]\right\}=$$
$$=d_0(x)-C_{n+1}d_1(x)-C_{n+2}d_2(x)-...-C_{n+p}d_p(x),$$

где

$$d_0(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_i^{10}(x_0)}{W^*(x_0)}L_n\left[z_i(x)\right],\quad d_1(x)=L_n\left[z_{n+1}(x)\right]-\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_i^{11}(x_0)}{W^*(x_0)}L_n\left[z_i(x)\right],$$
$$\ldots,\quad d_p(x)=L_n\left[z_{n+p}(x)\right]-\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_i^{1p}(x_0)}{W^*(x_0)}L_n\left[z_i(x)\right].$$

Найдем производную функции $g(x)$:

$$g'(x)=d_0'(x)+C_{n+1}d_1'(x)+C_{n+2}d_2'(x)+...+C_{n+p}d_p'(x).$$

Из формул (27) и (33) найдем $g^*(x)$ и $g_k^*(x)$; k=1,2,3, … . И проделаем аналогичные преобразования, что и для функции $g(x)$:

$$g^*(x) = -\frac{d_0'(x) + C_{n+1}d_1'(x) + C_{n+2}d_2'(x) + \ldots + C_{n+p}d_p'(x)}{\mu H(x,x)} =$$

$$= \overbrace{\frac{d_0'(x)}{\mu H(x,x)}}^{A_{00}(x)} + C_{n+1}\overbrace{\frac{d_1'(x)}{\mu H(x,x)}}^{A_{01}(x)} +$$

$$+ C_{n+2}\overbrace{\frac{d_2'(x)}{\mu H(x,x)}}^{A_{02}(x)} + \ldots + C_{n+p}\overbrace{\frac{d_p'(x)}{\mu H(x,x)}}^{A_{0p}(x)} =$$

$$= A_{00}(x) + C_{n+1}A_{01}(x) + C_{n+2}A_{02}(x) + \ldots + C_{n+p}A_{0p}(x),$$

$$g_1^*(x) = \int_a^b K^*(x,y)g^*(y)dy +$$

$$+ \mu\int_a^b K^*(x,y)\int_{x_0}^x R(\eta,y;1)g^*(\eta)d\eta dy =$$

$$= \int_a^b K^*(x,y)\left[\overbrace{\frac{d_0'(y)}{\mu H(y,y)}}^{A_{00}(y)} + C_{n+1}\overbrace{\frac{d_1'(y)}{\mu H(y,y)}}^{A_{01}(y)} + \right.$$

$$\left. + C_{n+2}\overbrace{\frac{d_2'(y)}{\mu H(y,y)}}^{A_{02}(y)} + \ldots + C_{n+p}\overbrace{\frac{d_p'(y)}{\mu H(y,y)}}^{A_{0p}(y)}\right]dy +$$

$$+ \int_a^b K^*(x,y)\int_{x_0}^y R(\eta,y;1)\left[\overbrace{\frac{d_0'(\eta)}{\mu H(\eta,\eta)}}^{A_{00}(\eta)} + C_{n+1}\overbrace{\frac{d_1'(\eta)}{\mu H(\eta,\eta)}}^{A_{01}(\eta)} + \right.$$

$$+C_{n+2}\overbrace{\frac{d_2'(\eta)}{\mu H(\eta,\eta)}}^{A_{02}(\eta)}+\ldots+C_{n+p}\overbrace{\frac{d_p'(\eta)}{\mu H(\eta,\eta)}}^{A_{0p}(\eta)}\Bigg]d\eta dy=$$

$$=\left[\int_a^b K^*(x,y)\overbrace{\frac{d_0'(y)}{\mu H(y,y)}}^{A_{00}(y)}dy+\int_a^b K^*(x,y)\int_{x_0}^{y}R(\eta,y;1)\overbrace{\frac{d_0'(\eta)}{\mu H(\eta,\eta)}}^{A_{00}(\eta)}d\eta dy\right]+$$

$$+C_{n+1}\left[\int_a^b K^*(x,y)\overbrace{\frac{d_1'(y)}{\mu H(y,y)}}^{A_{01}(y)}dy+\int_a^b K^*(x,y)\int_{x_0}^{y}R(\eta,y;1)\overbrace{\frac{d_1'(\eta)}{\mu H(\eta,\eta)}}^{A_{01}(\eta)}d\eta dy\right]+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+C_{n+p}\left[\int_a^b K^*(x,y)\overbrace{\frac{d_p'(y)}{\mu H(y,y)}}^{A_{0p}(y)}dy+\int_a^b K^*(x,y)\int_{x_0}^{y}R(\eta,y;1)\overbrace{\frac{d_p'(\eta)}{\mu H(\eta,\eta)}}^{A_{0p}(\eta)}d\eta dy\right]=$$

$$=A_{10}(x)+C_{n+1}A_{11}(x)+C_{n+2}A_{12}(x)+\ldots+C_{n+p}A_{1p}(x)\,.$$

Здесь через $A_{10}(x),\ A_{11}(x),\ A_{12}(x),\ \ldots,\ A_{1p}(x)$ соответственно обозначены выражения в квадратных скобках.

Аналогично найдем

$$g_2^*(x)=\int_a^b K^*(x,y)\left[g_1^*(y)+\int_{x_0}^{y}R(\eta,y;1)g_1^*(\eta)d\eta dy\right]dy=$$

$$=\left[\int_a^b K^*(x,y)A_{10}(y)dy+\int_a^b K^*(x,y)\int_{x_0}^{y}R(\eta,y;1)A_{10}(\eta)d\eta dy\right]+$$

$$+C_{n+1}\left[\int_a^b K^*(x,y)A_{11}(y)dy+\int_a^b K^*(x,y)\int_{x_0}^{y}R(\eta,y;1)A_{11}(\eta)d\eta dy\right]+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+C_{n+p}\left[\int_a^b K^*(x,y)A_{1p}(y)dy+\int_a^b K^*(x,y)\int_{x_0}^y R(\eta,y;1)A_{1p}(\eta)d\eta dy\right]=$$

$$=A_{20}(x)+C_{n+1}A_{21}(x)+C_{n+2}A_{22}(x)+\ldots+C_{n+p}A_{2p}(x)\,,$$

где через $A_{20}(x),\ A_{21}(x),\ ...,\ A_{2p}(x)$ соответственно обозначены выражения в квадратных скобках.

……………………………………………………

$$g_k^{\ *}(x)=A_{k0}(x)+C_{n+1}A_{k1}(x)+C_{n+2}A_{k2}(x)+\ldots+C_{n+p}A_{kp}(x)\,,$$

где

$$A_{k0}(x)=\int_a^b K^*(x,y)A_{k-1,0}(y)dy+\int_a^b K^*(x,y)\int_{x_0}^y R(\eta,y;1)A_{k-1,0}(\eta)d\eta dy\,,$$

……………………………………………………..

$$A_{kp}(x)=\int_a^b K^*(x,y)A_{k-1,p}(y)dy+\int_a^b K^*(x,y)\int_{x_0}^y R(\eta,y;1)A_{k-1,p}(\eta)d\eta dy\,,$$

……………………………………………………..

По формуле (30) найдем

$$G^*(x,\lambda)=A_{00}(x)+C_{n+1}A_{01}(x)+C_{n+2}A_{02}(x)+\ldots+C_{n+p}A_{0p}(x)+$$

$$+\lambda\big[A_{10}(x)+C_{n+1}A_{11}(x)+C_{n+2}A_{12}(x)+\ldots+C_{n+p}A_{1p}(x)\big]+$$

$$+\lambda^2\big[A_{20}(x)+C_{n+1}A_{21}(x)+C_{n+2}A_{22}(x)+\ldots+C_{n+p}A_{2p}(x)\big]+$$

………………………………………………………

$$+\lambda^k\big[A_{k0}(x)+C_{n+1}A_{k1}(x)+C_{n+2}A_{k2}(x)+\ldots+C_{n+p}A_{kp}(x)\big]+\ldots\ .$$

Так как доказано, что этот ряд сходится абсолютно для достаточно малых λ, то его члены можно перегруппировать:

$$G^*(x,\lambda)=[A_{00}(x)+\lambda A_{10}(x)+\lambda^2A_{20}(x)+\ldots+\lambda^kA_{k0}(x)+\ldots]+$$

$$+C_{n+1}[A_{01}(x)+\lambda A_{11}(x)+\lambda^2A_{21}(x)+\ldots+\lambda^kA_{k1}(x)+\ldots]+$$

$$+C_{n+2}[A_{02}(x)+\lambda A_{12}(x)+\lambda^2A_{22}(x)+\ldots+\lambda^kA_{k2}(x)+\ldots]+$$

…………………………………………………

$$+C_{n+p}[A_{0p}(x)+\lambda A_{1p}(x)+\lambda^2A_{2p}(x)+\ldots+\lambda^kA_{kp}(x)+\ldots]=$$

$$= G_0(x) + C_{n+1}G_1(x) + \ldots + C_{n+p}G_p(x),$$

где через $G_0(x)$, $G_1(x)$, ..., $G_p(x)$ соответственно обозначены сходящиеся ряды в квадратных скобках. И окончательно по формуле (29) найдем $F(x)$:

$$F(x) = G^*(x,\lambda) + \int_{x_0}^{x} R(\eta, x; 1) G^*(\eta,\lambda) d\eta =$$

$$= G_0(x) + C_{n+1}G_1(x) + \ldots + C_{n+p}G_p(x) +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} R(\eta, x; 1)\left[G_0(\eta) + C_{n+1}G_1(\eta) + \ldots + C_{n+p}G_p(\eta)\right] d\eta =$$

$$= \left[G_0(x) + \int_{x_0}^{x} R(\eta, x; 1) G_0(\eta) d\eta\right] +$$

$$+ C_{m+1}\left[G_1(x) + \int_{x_0}^{x} R(\eta, x; 1) G_1(\eta) d\eta\right] + \ldots +$$

$$+ C_{m+p}\left[G_p(x) + \int_{x_0}^{x} R(\eta, x; 1) G_p(\eta) d\eta\right] =$$

$$= E_0(x) + C_{n+1}E_1(x) + \ldots + C_{n+p}E_p(x),$$

где через $E_0(x)$, $E_1(x)$, ..., $E_p(x)$ соответственно обозначены выражения в квадратных скобках. Найденное выражение для $F(x)$ и вычисленное значение $g(x)$ по формулам в (24) подставляем в (25):

$$d_0(x) + C_{n+1}d_1(x) + C_{n+2}d_2(x) + \ldots + C_{n+p}d_p(x) +$$

$$+ \mu \int_{x_0}^{x} H(\eta, x)\left[E_0(\eta) + C_{n+1}E_1(\eta) + \ldots + C_{n+p}E_p(\eta)\right] d\eta +$$

$$+ \lambda \int_{a}^{b} K(x, y)\left[E_0(y) + C_{n+1}E_1(y) + \ldots + C_{n+p}E_p(y)\right] dy = 0.$$

или, перегруппировав слагаемые, найдем

$$\left[d_0(x) + \mu \int_{x_0}^{x} H(\eta, x) E_0(\eta) d\eta + \lambda \int_{a}^{b} K(x, y) E_0(y) dy\right] +$$

$$+C_{n+1}\left[d_1(x)+\mu\int_{x_0}^{x}H(\eta,x)E_1(\eta)d\eta+\lambda\int_a^b K(x,y)E_1(y)dy\right]+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

$$+C_{n+p}\left[d_p(x)+\mu\int_{x_0}^{x}H(\eta,x)E_p(\eta)d\eta+\lambda\int_a^b K(x,y)E_p(y)dy\right]=0\,.$$

Откуда, обозначив квадратные скобки соответственно через $-\Phi_0(x),\ \Phi_1(x),\ ...,\ \Phi_p(x)$, получим

$$-\Phi_0(x)+C_{n+1}\Phi_1(x)+...+C_{n+p}\Phi_p(x)=0$$

$$\text{или }\ C_{n+1}\Phi_1(x)+...+C_{n+p}\Phi_p(x)=\Phi_0(x)\,.$$

Это равенство должно выполняться тождественно относительно *x*. Продифференцируем его (*p*–1) раз и, подставляя в полученные равенства значение $x=x_0$, получим систему *p* уравнений с *p* неизвестными постоянными:

$$\begin{cases} C_{n+1}\Phi_1(x_0)+C_{n+2}\Phi_2(x\ \ )+...+C_{n+p}\Phi_p(x_0)=\Phi_0(x_0)\ , \\ C_{n+1}\Phi_1'(x_0)+C_{n+2}\Phi_2'(x_0)+...+C_{n+p}\Phi_p'(x_0)=\Phi_0'(x_0)\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{n+1}\Phi_1^{(p-1)}(x_0)+C_{n+2}\Phi_2^{(p-1)}(x_0)+...+C_{n+p}\Phi_p^{(p-10}(x_0)= \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =\Phi_0^{(p-10}(x_0)\ . \end{cases} \qquad (35)$$

Если определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} \Phi_1(x_0) & \Phi_2(x_0) & ... & \Phi_p(x_0) \\ \Phi_1'(x_0) & \Phi_2'(x_0) & ... & \Phi_p'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ \Phi_1^{(p-1)}(x_0) & \Phi_2^{(p-1)}(x_0) & ... & \Phi_p^{(p-1)}(x_0) \end{vmatrix}\neq 0$$

и все $\Phi_0^i(x_0)\neq 0$ одновременно $(i=0,1,2,...,p-1)$, то постоянные $C_{n+1},\ C_{n+2},\ ...,\ C_{n+p}$ определяются единственным образом.

Если же все $\Phi_0^i(x_0)=0$ одновременно, то для единственности решения необходимо, чтобы этот определитель равнялся нулю. При решении примеров эти факты легко проверяются, так как функции

$\Phi_0(x),\ \Phi_1(x),\ \ldots,\ \Phi_p(x)$ будут определены.

Пример 2.

Найти решение уравнения

$$z'(x) - z(x) + \lambda x \int_0^1 [z''(y) + z'(y)]\, y dy = 0$$

при начальных условиях $z(x_0) = z_0 = 1$.

Положим $z''(x) + z'(x) = F(x)$. Сначала находим общее решение однородного уравнения $z''(x) + z'(x) = 0$:

$$k^2 + k = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = -1;$$

$$z_1(x) = 1; \quad z_2(x) = e^{-x}, \quad z(x) = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

Затем методом вариации произвольной постоянной ищем решение неоднородного уравнения:

$$\begin{cases} C_1' \cdot 1 + C_2' e^{-x} = 0\ , \\ C_1' \cdot 0 - C_2' e^{-x} = F(x)\ , \end{cases} \qquad C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ F & -e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{-x} \\ 0 & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{-e^{-x}}{-e^{-x}} F(x)\ ,$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{-x} \\ 0 & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{-e^{-x}} F(x)\ ,$$

откуда

$$W_1(x) = -e^{-x}, \quad W_2(x) = 1, \quad W(x) = -e^{-x}.$$

Решение исходного уравнения будем искать в форме (6.0):

$$z(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + \int_{x_0}^{x} \frac{-e^{\eta} \cdot 1 + 1 \cdot e^{-x}}{-e^{-\eta}} F(\eta) d\eta =$$

$$= C_1 + C_2 e^{-x} + \int_{x_0}^{x} (1 - e^{\eta - x}) F(\eta) d\eta\ , \qquad (**)$$

$$z'(x) = -C_2 e^{-x} + \int_{x_0}^{x} e^{\eta - x} F(\eta) d\eta\ ,$$

откуда $1 = C_1 + C_2 e^{-x_0}$ или $C_1 = 1 - C_2 e^{-x_0}$.

Подставив $z'(x)$ и $z(x)$ в исходное уравнение и заменив C_1 его выражением через C_2:

$$-C_2 e^{-x} + \int_{x_0}^{x} e^{\eta - x} F(\eta) d\eta - C_1 - C_2 e^{-x} -$$

$$-\int_{x_0}^{x} (1 + e^{\eta - x}) F(\eta) d\eta + \lambda \int_0^1 y F(y) dy = 0,$$

получим разрешающее уравнение

$$C_2 e^{-x_0} - 1 - 2C_2 e^{-x} + \int_{x_0}^{x} (2e^{\eta - x} - 1) F(\eta) d\eta + \lambda x \int_0^1 y F(y) dy = 0.$$

Вводим обозначения:

$$g(x) = C_2 e^{-x_0} - 1 - 2C_2 e^{-x};\ \mu = 1;\ H(\eta, x) = 2e^{\eta - x} - 1,$$

$$K(x, y) = xy;\ g'(x) = 2C_2 e^{-x};\ H(x, x) = 1;\ K'_x(x, y) = y;$$

$$H'_x(\eta, x) = -2e^{\eta - x}$$

и по формулам (27) находим

$$g^*(x) = -\frac{2C_2 e^{-x}}{1 \cdot 1} = -2C_2 e^{-x},\quad K^*(x, y) = -\frac{y}{1 \cdot 1} = -y,$$

$$H^*(\eta, x) = -\frac{-2e^{\eta - x}}{1} = 2e^{\eta - x}.$$

Затем, найдем резольвенту ядра $H^*(\eta, x)$, определив сначала итерированные ядра

$$H_2^*(\eta, x) = \int_{\eta}^{x} 2e^{s - x} \cdot 2e^{\eta - s} ds = \frac{2^2}{1!} e^{\eta - x} (x - \eta),$$

$$H_3^*(\eta, x) = \int_{\eta}^{x} 2e^{s - x} \cdot 2^2 e^{\eta - s} (s - \eta) ds = -\frac{2^3}{2!} e^{\eta - x} (x - \eta)^2,$$

……………………………………………………………

$$H_r^*(\eta, x) = \int_{\eta}^{x} H(s, x) H_{r-1}(\eta, s) ds = -\frac{2^r}{(r-1)!} e^{\eta - x} (x - \eta)^{r-1} (-1)^r,$$

$$R(\eta,x;1)=2e^{\eta-x}\left[1+\frac{2}{1!}(x-\eta)+\frac{2^2}{2!}(x-\eta)^2+...+\frac{2^r}{r!}(x-\eta)^r+...\right]=$$

$$2e^{\eta-x}e^{2(x-\eta)}=2e^{x-\eta}.$$

По формулам (33) определим $g_k^{*}(x);\ k=1,2,3,...:$

$$g_1^{*}(x)=\int_0^1(-y)(-2C_2e^{-y})dy+\int_0^1(-y)\int_{x_0}^{y}2e^{y-\eta}(-2C_2e^{-\eta})d\eta dy=$$

$$=2C_2\int_0^1 ye^{-y}dy+4C_2\int_0^1 y\int_{x_0}^{y}e^{y-2\eta}d\eta dy=$$

$$=2C_2e^{-y}(-y-1)\Big|_0^1+4C_2\int_0^1 y\left.\frac{e^{y-2\eta}}{-2}\right|_{x_0}^{y}dy=$$

$$=-4C_2e^{-1}+2C_2-2C_2\int_0^1 y(e^{-y}-e^{y-2x_0})\,dy=$$

$$=-4C_2e^{-1}+2C_2-2C_2\Big[(-y-1)e^{-y}-e^{y-2x_0}(y-1)\Big]_0^1=$$

$$=-4C_2e^{-1}+2C_2-2C_2[-2e^{-1}+1-e^{-2x_0}]=2C_2e^{-2x_0},$$

$$g_2^{*}(x)=\int_0^1(-y)2C_2e^{-2x_0}dy+\int_0^1(-y)\int_{x_0}^{y}2e^{y-\eta}(2C_2e^{-2x_0})d\eta dy=$$

$$=-2C_2e^{-2x_0}\int_0^1 ydy-4C_2e^{-2x_0}\int_0^1 y\int_{x_0}^{y}e^{y-\eta}d\eta dy=$$

$$-2C_2e^{-2x_0}\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1+4C_2e^{-2x_0}\int_0^1 \left.ye^{y-\eta}\right|_{x_0}^{y}dy=$$

$$=-C_2e^{-2x_0}+4C_2e^{-2x_0}\int_0^1 y(1-e^{y-x_0})dy=$$

$$=-C_2e^{-2x_0}+4C_2e^{-2x_0}\left[\frac{y^2}{2}-e^{y-x_0}(y-1)\right]\Bigg|_0^1=$$

$$= -C_2 e^{-2x_0} + 4C_2 e^{-2x_0}\left[\frac{1}{2} - e^{-x_0}\right] =$$

$$-C_2 e^{-2x_0} + 2C_2 e^{-2x_0} - 4C_2 e^{-3x_0} = C_2 e^{-2x_0}(1-4e^{-x_0}),$$

$$g_3^*(x) = \int_0^1 (-y) C_2 e^{-2x_0}(1-4e^{-x_0})dy +$$

$$+\int_0^1 (-y)\int_{x_0}^{y} 2e^{y-\eta} C_2 e^{-2x_0}(1-4e^{-x_0})d\eta dy =$$

$$= -C_2 e^{-2x_0}(1-4e^{-x_0})\int_0^1 y dy - 2C_2 e^{-2x_0}(1-4e^{-x_0})\int_0^1 y \int_{x_0}^{y} e^{y-\eta} d\eta dy =$$

$$= -C_2 e^{-2x_0}(1-4e^{-x_0})\left[\frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{2} - e^{-x_0}\right)\right] =$$

$$= -C_2 e^{-2x_0}(1-4e^{-x_0}(-\frac{1}{2} + 2e^{-x_0}) = \frac{1}{2} C_2 e^{-2x_0}(1-4e^{-x_0})^2,$$

$$g_4^*(x) = \frac{1}{4} C_2 e^{-2x_0}(1-4e^{-x_0})^3,$$

………………………………………………………………

$$g_k^*(x) = \frac{1}{2^{k-2}} C_2 e^{-2x_0}(1-4e^{-x_0})^{k-1},$$

………………………………………………………………………………..

Найденные значения $g_k^*(x)$ подставляем в (30):

$$G^*(x,\lambda) = -2C_2 e^{-x} + 2C_2 e^{-2x_0}\lambda + C_2 e^{-2x_0}(1-4e^{-x_0})\lambda^2 +$$

$$+\frac{1}{2} C_2 e^{-2x_0}(1-4e^{-x_0})^2 \lambda^3 + \ldots +$$

$$+\frac{1}{2^{k-2}} C_2 e^{-2x_0}(1-4e^{-x_0})^{k-1}\lambda^k + \ldots. = -2C_2 e^{-x} +$$

$$+2C_2 e^{-2x_0}\lambda\left[1 + \frac{1-4e^{-x_0}}{2}\lambda + \frac{(1-4e^{-x_0})^2}{2^2}\lambda^2 + \ldots + \frac{(1-4e^{-x_0})^k}{2^k}\lambda^k + \ldots\right] =$$

$$= -2C_2 e^{-x} + \frac{2C_2 e^{-2x_0}\lambda}{1 - \frac{1-4e^{-x_0}}{2}\lambda} = -2C_2 e^{-x} + \frac{4C_2 e^{-2x_0}\lambda}{2 - \lambda(1-4e^{-x_0})}$$

и согласно (29) находим

$$F(x) = -2C_2e^{-x} + \underbrace{\frac{4C_2e^{-2x_0}\lambda}{2-\lambda(1-4e^{-x_0})}}_{a} +$$

$$+\int_{x_0}^{x} 2e^{x-\eta}\left[-2C_2e^{-\eta} + \underbrace{\frac{4C_2e^{-2x_0}\lambda}{2-\lambda(1-4e^{-x_0})}}_{a}\right]d\eta =$$

$$= -2C_2e^{-x} + a + \int_{x_0}^{x}(-4C_2)e^{x-2\eta}d\eta + 2a\int_{x_0}^{x} e^{x-\eta}d\eta =$$

$$= -2C_2e^{-x} + a - 4C_2\left.\frac{e^{x-2\eta}}{-2}\right|_{x_0}^{x} - 2ae^{x-\eta}\Big|_{x_0}^{x} =$$

$$= -2C_2e^{-x} + a + 2C_2(e^{-x} - e^{x-2x_0}) - 2a(1-e^{x-x_0}) = 2e^{x-x_0}(a - C_2e^{-x_0}) - a\,.$$

Найдем C_2 из условия, чтобы $F(x)$ удовлетворяло разрешающему уравнению (25):

$$C_2e^{-x_0} - 1 - 2C_2e^{-x} + \int_{x_0}^{x}(2e^{\eta-x} - 1)F(\eta)d\eta + \lambda x\int_0^1 yF(y)dy = 0\,,$$

где положив $x = x_0$, найдем

$$C_2e^{-x_0} - 1 - 2C_2e^{-x_0} + \lambda x_0\int_0^1 y\left[2e^{y-x_0}(a - C_2e^{-x_0}) - a\right]dy = 0\,,$$

$$-C_2e^{-x_0} - 1 + \lambda x_0\int_0^1\left[2ye^{y-x_0}(a - C_2e^{-x_0}) - ay\right]dy = 0\,,$$

$$-C_2e^{-x_0} - 1 + 2\lambda x_0(y-1)e^{y-x_0}(a - C_2e^{-x_0})\Big|_0^1 - \lambda x_0 a\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = 0\,,$$

$$-C_2e^{-x_0} - 1 + 2\lambda x_0 e^{-x_0}(a - C_2e^{-x_0}) - \frac{\lambda x_0 a}{2} = 0\,,$$

$$-C_2e^{-x_0} - 1 + 2\lambda x_0 e^{-x_0}a - 2\lambda x_0 C_2 e^{-2x_0} - \frac{\lambda x_0 a}{2} = 0\,,$$

$$-C_2e^{-x_0}-1+2\lambda x_0e^{-x_0}\frac{4C_2e^{-2x_0}\lambda}{2-\lambda(1-4e^{-x_0})}-$$

$$-2\lambda x_0C_2e^{-2x_0}-\frac{\lambda x_0}{2}\frac{4C_2e^{-2x_0}\lambda}{2-\lambda(1-4e^{-x_0})}=0\,,$$

$$C_2(-e^{-x_0}+\frac{8e^{-3x_0}\lambda^2x_0}{2-\lambda+4\lambda e^{-x_0}}-2\lambda x_0e^{-2x_0}-\frac{2e^{-2x_0}\lambda^2x_0}{2-\lambda+4\lambda e^{-x_0}})=1\,,$$

$$C_2\,\frac{-2e^{-x_0}+\lambda e^{-x_0}-4\lambda e^{-2x_0}+8\lambda^2x_0e^{-3x_0}-}{2-\lambda+}$$

$$\frac{-4\lambda x_0e^{-2x_0}+2\lambda^2x_0e^{-2x_0}-8\lambda^2x_0e^{-3x_0}-2\lambda^2x_0e^{-2x_0}}{+4\lambda e^{-x_0}}=1\,,$$

$$C_2=\frac{2-\lambda+4\lambda e^{-x_0}}{e^{-2x_0}[(-2+\lambda)e^{x_0}-4\lambda-4\lambda x_0]}=\frac{e^{2x_0}(2-\lambda+4\lambda e^{-x_0})}{(\lambda-2)e^{x_0}-4\lambda(1+x_0)}=$$

$$-\frac{e^{x_0}[e^{x_0}(2-\lambda)+4\lambda]}{(2-\lambda)e^{x_0}+4\lambda(1+x_0)}$$

и по формуле (**) находим решение

$$z(x)=C_1+C_2e^{-x}+\int_{x_0}^{x}(1-e^{\eta-x})F(\eta)d\eta=1-C_2e^{-x_0}+C_2e^{-x}+$$

$$+\int_{x_0}^{x}(1+e^{\eta-x})\Big[2e^{\eta-x_0}(a-C_2e^{-x_0})-a\Big]\,d\eta=1-C_2e^{-x_0}+C_2e^{-x}+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\Big[2e^{\eta-x_0}(a-C_2e^{-x_0})-a-2e^{2\eta-x-x_0}(a-C_2e^{-x_0})+ae^{\eta-x}\Big]\,d\eta=$$

$$=1-C_2e^{-x_0}+C_2e^{-x}+$$

$$+\Big[2e^{\eta-x_0}(a-C_2e^{-x_0})-a\eta-e^{2\eta-x-x_0}(a-C_2e^{-x_0})+ae^{\eta-x}\Big]\Big|_{x_0}^{x}=$$

$$=1-C_2e^{-x_0}+C_2e^{-x}+[2e^{x-x_0}(a-C_2e^{-x_0})-ax-$$

$$-e^{x-x_0}(a-C_2e^{-x_0})+a-2(a-C_2e^{-x_0})+$$

$$+ax_0+e^{x-x_0}(a-C_2e^{-x_0})+ae^{x_0-x}]=$$

$$=e^{x-x_0}(a-C_2e^{-x_0})+C_2e^{-x_0}-ax-a+ax_0+1]=$$

$$= e^{x-x_0}\left[\frac{4C_2e^{-2x_0}\lambda}{2-\lambda(1-4e^{-x_0})} - C_2e^{-x_0}\right] + C_2e^{-x_0} -$$

$$-\frac{4C_2e^{-2x_0}\lambda}{2-\lambda(1-4e^{-x_0})}(x+1-x_0)+1=$$

$$= C_2\left[e^x e^{-2x_0}\,\frac{4\lambda-(2-\lambda)e^{x_0}-4\lambda}{(2-\lambda)e^{x_0}+4\lambda} + \right.$$

$$\left. + e^{-x_0} - \frac{4e^{-x_0}\lambda}{(2-\lambda)e^{x_0}+4\lambda}(x+1-x_0)\right]+1=$$

$$= -\frac{e^{x_0}\left[e^{x_0}(2-\lambda)+4\lambda\right]}{(2-\lambda)e^{x_0}+4\lambda(1+x_0)}\times$$

$$\times\left[e^x\,\frac{(\lambda-2)}{e^{x_0}[(2-\lambda)e^{x_0}+4\lambda]} + e^{-x_0} - \frac{4e^{-x_0}\lambda(x+1-x_0)}{(2-\lambda)e^{x_0}+4\lambda}\right]+1=$$

$$= -\frac{e^{x_0}\left[e^{x_0}(2-\lambda)+4\lambda\right]}{(2-\lambda)e^{x_0}+4\lambda(1+x_0)}\times$$

$$\times\frac{e^x(\lambda-2)+(2-\lambda)e^{x_0}+4\lambda-4\lambda(x+1-x_0)}{e^{x_0}[(2-\lambda)e^{x_0}+4\lambda]}+1=$$

$$= \frac{-e^x(\lambda-2)-(2-\lambda)e^{x_0}-4\lambda+}{(2-\lambda)e^{x_0}+}$$

$$\frac{+4\lambda(x+1-x_0)+(2-\lambda)e^{x_0}+4\lambda(1+x_0)}{+4\lambda(1+x_0)},$$

$$z(x) = \frac{e^x(2-\lambda)+4\lambda(x+1)}{(2-\lambda)e^{x_0}+4\lambda(1+x_0)}.$$

Нетрудно проверить, что найденное решение тождественно удовлетворяет поставленной задаче для любых λ, кроме характеристического

$$\lambda = \frac{2e^{x_0}}{e^{x_0}-4-4x_0}.$$

Глава III.

Решение линейных интегродифференциальных уравнений Фредгольма без использования фундаментальных систем решений внешнего и внутреннего дифференциальных операторов

§ 1. Преобразования внешнего и внутреннего *дифференциальных операторов*

Рассмотрим уравнение

$$L_n[z(x)] + \lambda \int_a^b K(x,y) P_m[z(y)]dy = 0\,, \qquad (1)$$

где

$$L_n[z(x)] = \frac{d^n z(x)}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}z(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x)z(x)\,,$$

$$P_m[z(y)] = b_0(y)\frac{d^m z(y)}{dy^m} + b_1(y)\frac{d^{m-1}z(y)}{dy^{m-1}} + \ldots + b_m(y)z(y)$$

……………………………………………….

Положим

$$z^{(n)}(x) = u(x)\,, \qquad (2.0)$$

тогда

$$z^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} u(\eta)d\eta + C_1\,, \qquad (2.1)$$

и x_0 – любое из отрезка $[a,b]$ при нахождении общего решения, x_0 – начальное значение при решении задачи Коши.

$$z^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\eta} u(\eta)d\eta^2 + C_1(x - x_0) + C_2$$

и по формуле Коши имеем

$$z^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^{x} (x-\eta)u(\eta)d\eta + C_1(x - x_0) + C_2\,, \qquad (2.2)$$

$$z^{(n-3)}(x)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}u(\eta)d\eta^2+\frac{C_1}{2!}(x-x_0)^2+C_2(x-x_0)+C_3=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(x-\eta)^2u(\eta)d\eta+\frac{C_1}{2!}(x-x_0)^2+C_2(x-x_0)+C_3, \qquad (2.3)$$

……………………………………………………………

$$z^{(m)}(x)=z^{(n-(n-m))}(x)=$$

$$\frac{1}{(n-m-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-\eta)^{n-m-1}u(\eta)d\eta+\frac{C_1}{(n-m-1)!}(x-x_0)^{n-m-1}+$$

$$+\frac{C_2}{(n-m-2)!}(x-x_0)^{n-m-2}+\ldots+C_{n-m-1}(x-x_0)+C_{n-m}, \qquad (2.n\text{–}m)$$

$$z^{(m-1)}(x)=z^{(n-(n-m+1))}(x)=$$

$$=\frac{1}{(n-m)!}\int_{x_0}^{x}(x-\eta)^{n-m}u(\eta)d\eta+\frac{C_1}{(n-m)!}(x-x_0)^{n-m}+$$

$$+\frac{C_2}{(n-m-1)!}(x-x_0)^{n-m-1}+\ldots+C_{n-m}(x-x_0)+C_{n-m+1}, \qquad (2.n\text{–}m+1)$$

……………………………………………………………

$$z'(x)=\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-\eta)^{n-2}u(\eta)d\eta+\frac{C_1(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+$$

$$+\ldots+C_{n-2}(x-x_0)+C_{n-1}, \qquad (2.n\text{–}1)$$

$$z(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-\eta)^{n-1}u(\eta)\,d\eta+\frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+$$

$$+\ldots+C_{n-1}(x-x_0)+C_n. \qquad (2.n)$$

Найдем $L_n\left[z(x)\right]$, подставив полученные выражения для $z(x)$, $z'(x)$, ..., $z^{(n)}(x)$:

$$L_n\left[z(x)\right]=u(x)+a_1(x)\int_{x_0}^{x}u(\eta)d\eta+a_1(x)C_1+$$

$$+a_2(x)\int_{x_0}^{x}(x-\eta)u(\eta)d\eta+a_2(x)[C_1(x-x_0)+C_2]+$$

$$+\frac{a_3(x)}{2}\int_{x_0}^{x}(x-\eta)^2 u(\eta)d\eta + a_3(x)[\frac{C_1}{2!}(x-x_0)^2 + C_2(x-x_0)+C_3]+$$

$$+\ldots+\frac{a_{n-1}(x)}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-\eta)^{n-2}u(\eta)d\eta+$$

$$+a_{n-1}(x)[\frac{C_1}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+\frac{C_2}{(n-3)!}(x-x_0)^{n-3}+$$

$$+\ldots+C_{n-2}(x-x_0)+C_{n-1}]+\frac{a_n(x)}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-\eta)^{n-1}u(\eta)\ d\eta+$$

$$+a_n(x)[\frac{C_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{C_2}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+$$

$$+\ldots+C_{n-1}(x-x_0)+C_n]=$$

$$=u(x)+\int_{x_0}^{x}\Big[a_1(x)+a_2(x)(x-\eta)+$$

$$+\frac{a_3(x)}{2!}(x-\eta)^2+\ldots+\frac{a_n(x)}{(n-1)!}(x-\eta)^{n-1}\Big]u(\eta)d\eta+$$

$$+[a_1(x)C_1+a_2(x)(C_1(x-x_0)+C_2)+$$

$$+a_3(x)(\frac{C_1}{2!}(x-x_0)^2+C_2(x-x_0)+C_3)+\ldots+$$

$$+a_n(x)(\frac{C_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$

$$+\frac{C_2}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+\ldots+C_{n-1}(x-x_0)+C_n)]\,.$$

Введем обозначения

$$-H_1(\eta,x)=a_1(x)+a_2(x)(x-\eta)+$$

$$+\frac{a_3(x)}{2!}(x-\eta)^2+\ldots+\frac{a_n(x)}{(n-1)!}(x-\eta)^{n-1},$$

$$g_1(x)=a_1(x)C_1+a_2(x)[C_1(x-x_0)+C_2]+$$

$$+a_3(x)[\frac{C_1}{2!}(x-x_0)^2+C_2(x-x_0)+C_3]+\ldots+$$

$$+a_n(x)[\frac{C_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$

$$+\frac{C_2}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+\ldots+C_{n-1}(x-x_0)+C_n]. \quad (3)$$

Тогда выражение для $L_n\left[z(x)\right]$ перепишется

$$L_n\left[z(x)\right]=u(x)-\int_{x_0}^{x}H(\eta,x)u(\eta)d\eta+g_1(x). \quad (4)$$

Теперь найдем $P_m\left[z(y)\right]$:

$$P_m\left[z(y)\right]=\frac{b_0(y)}{(n-m-1)!}\int_{x_0}^{y}(y-\eta)^{n-m-1}u(\eta)d\eta+$$

$$+b_0(y)[\frac{C_1(y-x_0)^{n-m-1}}{(n-m-1)!}+\frac{C_2(y-x_0)^{n-m-2}}{(n-m-2)!}+\ldots+$$

$$+C_{n-m-1}(y-x_0)+C_{n-m}]+\frac{b_1(y)}{(n-m)!}\int_{x_0}^{y}(y-\eta)^{n-m}u(\eta)d\eta+$$

$$+b_1(y)[\frac{C_1(y-x_0)^{n-m}}{(n-m)!}+\frac{C_2(y-x_0)^{n-m-1}}{(n-m-1)!}+$$

$$+\ldots+C_{n-m-1}]+\ldots+\frac{b_{m-1}(y)}{(n-2)!}\int_{x_0}^{y}(y-\eta)^{n-2}u(\eta)d\eta+$$

$$+b_{m-1}(y)[\frac{C_1(y-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{C_2(y-x_0)^{n-3}}{(n-3)!}+\ldots+$$

$$+C_{n-1}]+\frac{b_m(y)}{(n-1)!}\int_{x_0}^{y}(y-\eta)^{n-1}u(\eta)d\eta+$$

$$+b_m(y)[\frac{C_1(y-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{C_2(y-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+C_n],$$

$$P_m\left[z(y)\right]=-\int_{x_0}^{y}H_2(\eta,y)\,u(\eta)d\eta+g_2(y), \quad (5)$$

где

$$-H_2(\eta, y) = \frac{b_0(y)}{(n-m-1)!}(y-\eta)^{n-m-1} +$$

$$+\frac{b_1(y)}{(n-m)!}(y-\eta)^{n-m} + \ldots + \frac{b_m(y)}{(n-1)!}(y-\eta)^{n-1},$$

$$g_2(y) = b_0(y)[\frac{C_1(y-x_0)^{n-m-1}}{(n-m-1)!} + \frac{C_2(y-x_0)^{n-m-2}}{(n-m-2)!} +$$

$$+ \ldots + C_{n-m-1}(y-x_0) + C_{n-m}] +$$

$$+ b_1(y)[\frac{C_1(y-x_0)^{n-m}}{(n-m)!} + \frac{C_2(y-x_0)^{n-m-2}}{(n-m-1)!} + \ldots + C_{n-m-1}] + \ldots. +$$

$$+ b_m(y)[\frac{C_1(y-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2(y-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n]. \quad (6)$$

…………………………………………

§ 2. Построение разрешающего интегрального уравнения и его решение

Подставив (4) и (5) в уравнение (1) получим

$$u(x) - \int_{x_0}^{x} H_1(\eta, x) u(\eta) d\eta - g_1(x) +$$

$$+\lambda \int_a^b K(x,y) \left[\int_{x_0}^{y} [-H_2(\eta, y)] u(\eta) d\eta + g_2(y) \right] dy = 0$$

и положив

$$-g_1(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) g_2(y) dy = -g(x), \quad (7)$$

придем к разрешающему интегральному уравнению смешанного типа Вольтерра-Фредгольма

$$u(x) = g(x) + \int_{x_0}^{x} H_2(\eta, x) u(\eta) d\eta + \lambda \int_a^b K(x,y) \int_{x_0}^{y} H_2(\eta, y)\, u(\eta) d\eta dy. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) можно искать в форме ряда

$$u(x)=\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+\ldots+\lambda^k\varphi_k(x)+\ldots . \qquad (9)$$

Ряд (9) подставляем в уравнение (8):

$$\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+\ldots+\lambda^k\varphi_k(x)+\ldots=$$

$$=g_1(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)g_2(y)dy+$$

$$+\int_{x_0}^{x} H_2(\eta,x)[\varphi_0(\eta)+\lambda\varphi_1(\eta)+\lambda^2\varphi_2(\eta)+\ldots+\lambda^k\varphi_k(\eta)+\ldots]d\eta+$$

$$+\lambda\int_a^b K(x,y)\int_{x_0}^{y} H_2(\eta,y)[\varphi_0(\eta)+\lambda\varphi_1(\eta)+\lambda^2\varphi_2(\eta)+\ldots+$$

$$+\lambda^k\varphi_k(\eta)+\ldots]\,d\eta dy$$

и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим систему рекуррентных интегральных уравнений Вольтера 2-го рода:

$$\begin{cases}
\varphi_0(x)=g_1(x)+\int\limits_{x_0}^{x} H_1(\eta,x)\varphi_0(\eta)d\eta\ , \\
\varphi_1(x)=-\int\limits_a^b K(x,y)g_2(y)dy+ \\
\qquad +\int\limits_a^b K(x,y)\int\limits_{x_0}^{y} H_2(\eta,y)\varphi_0(\eta)d\eta dy+\int\limits_{x_0}^{x} H_1(\eta,x)\varphi_1(\eta)d\eta, \\
\varphi_2(x)=\int\limits_a^b K(x,y)\int\limits_{x_0}^{y} H_2(\eta,y)\varphi_1(\eta)d\eta dy+\int\limits_{x_0}^{x} H_1(\eta,x)\varphi_2(\eta)d\eta, \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_k(x)=\int\limits_a^b K(x,y)\int\limits_{x_0}^{y} H_2(\eta,y)\varphi_{k-1}(\eta)d\eta dy+\int\limits_{x_0}^{x} H_1(\eta,x)\varphi_k(\eta)d\eta, \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases} \qquad (10)$$

Введем обозначения $q_0(x)=g_1(x)$,

$$q_1(x)=\int_a^b K(x,y)[-g_2(y)+\int_{x_0}^{y} H_2(\eta,y)\varphi_0(\eta)d\eta]\,dy,$$

$$q_2(x)=\int_a^b K(x,y)\int_{x_0}^{y} H_2(\eta,y)\varphi_1(\eta)d\eta dy,\ \ldots,$$

$$q_k(x)=\int_a^b K(x,y)\int_{x_0}^{y} H_2(\eta,y)\varphi_{k-1}(\eta)d\eta dy, \tag{11}$$

…………………………………………….. ,

тогда система (10) перепишется

$$\begin{cases} \varphi_0(x)=q_0(x)+\int_{x_0}^{x} H_1(\eta,x)\varphi_0(\eta)d\eta, \\ \varphi_1(x)=q_1(x)+\int_{x_0}^{x} H_1(\eta,x)\varphi_1(\eta)d\eta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_k(x)=q_k(x)+\int_{x_0}^{x} H_1(\eta,x)\varphi_k(\eta)d\eta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{12}$$

Если $\Gamma(\eta,x;1)$ – резольвента ядра $H_1(\eta,x)$ при $\mu=1$, то решение этой системы запишется

$$\begin{cases} \varphi_0(x)=q_0(x)+\int_{x_0}^{x} \Gamma(\eta,x;1)q_0(\eta)d\eta, \\ \varphi_1(x)=q_1(x)+\int_{x_0}^{x} \Gamma(\eta,x;1)q_1(\eta)d\eta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_k(x)=q_k(x)+\int_{x_0}^{x} \Gamma(\eta,x;1)q_k(\eta)d\eta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{13}$$

Подставляя $\varphi_k(x)$, $k=0,1,2,...$ из (13) в (11), получим рекуррентные формулы для $q_k(x)$, $k=0,1,2,...$:

$$q_0(x)=g_1(x),$$

$$q_1(x)=\int_a^b K(x,y)\{-g_2(y)+\int_{x_0}^{y} H_2(\eta,y)[q_0(\eta)+\int_{x_0}^{\eta}\Gamma(t,\eta;1)q_0(t)dt]d\eta\}dy,$$

$$q_2(x)=\int_a^b K(x,y)\int_{x_0}^{y} H_2(\eta,y)[q_1(\eta)+\int_{x_0}^{\eta}\Gamma(t,\eta;1)q_1(t)dt]d\eta dy,$$

....

$$q_k(x)=\int_a^b K(x,y)\int_{x_0}^{y} H_2(\eta,y)[q_{k-1}(\eta)+\int_{x_0}^{\eta}\Gamma(t,\eta;1)q_{k-1}(t)dt]d\eta dy, \quad (14)$$

....

Определив по формулам (14) $q_k(x)$, $k=0,1,2,...$ и подставив в (13), а затем (13) в (9), найдем решение уравнения (8)

$$u(x)=q_0(x)+\int_{x_0}^{x}\Gamma(\eta,x;1)q_0(\eta)d\eta+\lambda[q_1(x)+\int_{x_0}^{x}\Gamma(\eta,x;1)q_1(\eta)d\eta]+$$

$$+...+\lambda^k[q_k(x)+\int_{x_0}^{x}\Gamma(\eta,x;1)q_k(\eta)d\eta]+...=$$

$$=q_0(x)+\lambda q_1(x)+\lambda^2 q_1(x)+...+\lambda^k q_k(x)+...+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\Gamma(\eta,x;1)[q_0(x)+\lambda q_1(x)+\lambda^2 q_1(x)+...+\lambda^k q_k(x)+...+]d\eta.$$

Вводя обозначение

$$Q(x,\lambda)=q_0(x)+\lambda q_1(x)+\lambda^2 q_1(x)+...+\lambda^k q_k(x)+..., \quad (15)$$

решение перепишем

$$u(x)=Q(x,\lambda)+\int_{x_0}^{x}\Gamma(\eta,x;1)Q(\eta,\lambda)d\eta. \quad (16)$$

Докажем сходимость ряда (15), для этого введем ограничения: $|g_2(x)|\le g$; $|q_0(x)|\le q$; $|K(x,y)|\le K$; $|H_2(\eta,y)|\le H$; $|\Gamma(t,x;1)|\le \Gamma$; для $a\le x\le b$; $a\le y\le b$; $x_0\le\eta<y$; $x_0\le t<\eta$; $a\le x_0\le b$.

Тогда по формулам (14) имеем

$$\left|q_1(x)\right| = \left|\int_a^b K(x,y)\{-g_2(y) + \int_{x_0}^{y} H_2(\eta,y)[q_0(\eta) + \int_{x_0}^{\eta} \Gamma(t,\eta;1)q_0(t)dt]d\eta\}dy\right| \le$$

$$\le \left|\int_a^b K\{g + \int_{x_0}^{y} H[q + \int_{x_0}^{\eta} \Gamma q dt]d\eta\}dy\right| \le$$

$$\le K\left\{g + H[q + \Gamma q|b-a|]|b-a|\right\}|b-a| = \ldots = K|b-a|M ,$$

где $M = g + Hq[1 + \Gamma|b-a|]|b-a|$,

$$\left|q_2(x)\right| = \left|\int_a^b K(x,y)\int_{x_0}^{y} H_2(\eta,y)[q_1(\eta) + \int_{x_0}^{\eta} \Gamma(t,\eta;1)q_1(t)dt]d\eta dy\right| \le$$

$$\le \left|\int_a^b K\int_{x_0}^{y} H[K|b-a|M + \int_{x_0}^{\eta} \Gamma K|b-a|Mdt]d\eta dy\right| \le$$

$$\le K^2 H|b-a|^3 M(1 + \Gamma|b-a|) ,$$

$$\left|q_3(x)\right| \le K^3 H^2 |b-a|^5 M(1 + \Gamma|b-a|)^2 ,$$

……………………………………………………………………

$$\left|q_k(x)\right| \le K^k H^{k-1}|b-a|^{2k-1} M(1 + \Gamma|b-a|)^{k-1} ,$$

……………………………………………………………….........

Составляем мажорирующий ряд для ряда (15)

$$q + \lambda K|b-a|M + \lambda^2 K^2 H|b-a|^3 M(1 + \Gamma|b-a|) + \ldots +$$
$$+ \lambda^k K^k H^{k-1}|b-a|^{2k-1} M(1 + \Gamma|b-a|)^{k-1} + \ldots .$$

Этот ряд, как ряд составленный из членов геометрической прогрессии, сходится для

$$|\lambda| < \frac{1}{KH|b-a|^2(1 + \Gamma|b-a|)} . \qquad (17)$$

Следовательно, для этих значений λ ряд (15) сходится абсолютно и равномерно.

Подставляя (16) в (2.*n*), получим решение уравнения (1). Ограничения на λ возникли в силу применения рядов, как видно при решении примеров, решения полученные в замкнутом виде удовлетворяют данным уравнениям при всех значениях λ, кроме характекристических.

§3. Решение начальной задачи

Рассмотрим задачу Коши для случая $n > m$. Используя начальные данные $z^i(x_0)=z_0^i$, $i=\overline{0, n-1}$ в соответствии с (2.0)-(2.n–1), найдем

$$C_1 = z_0^{(n-1)},\ C_2 = z_0^{(n-2)},\ \ldots,\ C_{n-1} = z_0',\ C_n = z_0\,. \qquad (18)$$

Подставляя найденные значения постоянных в решение, определяемое формулой (2.n), где $u(x)$ определяется по формуле (16), получим решение задачи Коши.

В случае $n < m$, $n = m + p$ решение задачи Коши можно найти как и в гл. I, §4, предварительно продифференцировав уравнение (1) p раз и вычисляя лишние постоянные C_{n+1}, ..., C_{n+p} при последовательном дифференцировании уравнения (1).

Пример.

Решить уравнение

$$z''(x) + z'(x) - \lambda x \int_0^1 [z'(y) + z(y)]dy = 0$$

с начальными условиями $z(0) = 1$, $z'(0) = 1$.

По формулам (2.0)-(2.n) найдем

$$z''(x) = u(x)\,, \quad z'(x) = \int_0^x u(\eta)d\eta + C_1\,,$$

$$z(x) = \int_0^x \int_0^x u(\eta)d\eta + C_1(x - x_0) + C_2 =$$

$$= \int_0^x (x-\eta)u(\eta)d\eta + C_1(x - x_0) + C_2\,. \qquad (2.2^*)$$

Подставляем начальные данные и определяем $C_1 = 1$, $C_2 = 1$.

Воспользовавшись формулами (3), (6) и (7) составим разрешающее уравнение (8)

$$H_1(\eta, x) = -[1] = -1\,, \quad g_1(x) = -[C_1] = -1\,,$$

$$H_2(\eta, y) = -\left[\frac{1}{(2-1-1)!}(y-\eta)^{2-1-1} + \frac{1}{(2-1)!}(y-\eta)^{2-1}\right] =$$

$$= -1 - (y - \eta) = \eta - y - 1\,,$$

$$g_2(y)=1\left[\frac{C_1}{(2-1-1)!}y^{2-1-1}\right]+1\left[\frac{C_1}{(2-1)!}y^{2-1}+\frac{C_2}{(2-1-1)!}y^{2-1-1}\right]=$$
$$=C_1+C_1y+C_2=y+2,$$
$$g(x)=g_1(x)-\lambda\int_0^1(-x)g_2(y)dy=$$
$$-1-\lambda\int_0^1(-x)(y+2)dy=-1+\lambda x\left(\frac{y^2}{2}+2y\right)\Big|_0^1=\frac{5}{2}\lambda x-1,$$
$$u(x)=\frac{5}{2}\lambda x-1+\lambda\int_0^1(-x)\int_0^y(\eta-y-1)u(\eta)d\eta dy+\int_0^x(-1)u(\eta)d\eta,$$
$$u(x)=\frac{5}{2}\lambda x-1+\lambda x\int_0^1\int_0^y(y-\eta+1)u(\eta)d\eta dy-\int_0^x u(\eta)d\eta.$$

Найдем резольвенту для ядра $H_1(\eta,x)=-1$, вычислив сначала итерированные ядра

$$H_{12}(\eta,x)=\int_\eta^x(-1)(-1)ds=x-\eta,$$
$$H_{13}(\eta,x)=\int_\eta^x(-1)(s-\eta)ds=\int_\eta^x(\eta-s)ds=$$
$$=\left(\eta s-\frac{s^2}{2}\right)\Big|_\eta^x=\eta x-\frac{x^2}{2}-\eta^2+\frac{\eta^2}{2}=-\left(\frac{x^2}{2}-\eta x+\frac{\eta^2}{2}\right)=-\frac{1}{2}(x-\eta)^2,$$
$$H_{14}(\eta,x)=\int_\eta^x(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)(s^2-2s\eta+\eta^2)ds=\frac{1}{2}\left(\frac{s^3}{3}-s^2\eta+s\eta^2\right)\Big|_\eta^x=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-x^2\eta+x\eta^2-\frac{\eta^3}{3}-\eta^3+\eta^3\right)=\frac{1}{3!}(x-\eta)^3,$$

………………………………………………………

$$H_{1k}(\eta,x)=\frac{(-1)^k}{(k-1)!}(x-\eta)^{k-1},$$

………………………………………………………

$$\Gamma(\eta,x;1)=-1+(x-\eta)-\frac{1}{2!}(x-\eta)^2+$$

$$+\frac{1}{3!}(x-\eta)^3-...+\frac{(-1)^k}{(k-1)!}(x-\eta)^{k-1}+..., \quad \Gamma(\eta,x;1)=-e^{\eta-x}.$$

Далее определим коэффициенты ряда (9) по формулам (13), где коэффициенты $q_k(x)$, $k=0,1,2,...$ определяются по формулам (11)

$$\varphi_0(x)=-1+\int_0^x(-e^{\eta-x})(-1)d\eta=-1+e^{\eta-x}\Big|_0^x=-1+1-e^{-x}=-e^{-x},$$

$$q_1(x)=\int_0^1(-x)\{-(y+2)+\int_0^y(\eta-y-1)\varphi_0(\eta)d\eta\}dy=$$

$$=\frac{5}{2}x+x\int_0^1\int_0^y(y-\eta+1)\varphi_0(\eta)d\eta dy=$$

$$=\frac{5}{2}x+x\int_0^1\int_0^y(y-\eta+1)(-e^{-\eta})d\eta dy=$$

$$=\frac{5}{2}x+x\int_0^1(ye^{-\eta}+(-\eta-1)e^{-\eta}+e^{-\eta})\Big|_0^y dy=$$

$$=\frac{5}{2}x+x\int_0^1(ye^{-y}-ye^{-y}+e^{-y}-e^{-y}-y+1-1)dy=$$

$$=\frac{5}{2}x-x\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=\frac{5}{2}x-\frac{x}{2}=2x,$$

$$\varphi_1(x)=2x+\int_0^x(-e^{y-x})2ydy=2x-2e^{y-x}(y-1)\Big|_0^x=2(1-e^{-x}),$$

$$q_2(x)=\int_0^1(-x)\int_0^y(\eta-y-1)\varphi_1(\eta)d\eta dy=2x\int_0^1\int_0^y(y-\eta+1)(1-e^{-\eta})d\eta dy=$$

$$=2x\int_0^1 dy\int_0^y(y-\eta+1-ye^{-\eta}+\eta e^{-\eta}-e^{-\eta})d\eta=$$

$$=2x\int_0^1(y\eta-\frac{\eta^2}{2}+\eta+ye^{-\eta}+(-\eta-1)e^{-\eta}+e^{-\eta})\Big|_0^y dy=$$

$$=2x\int_0^1(y^2-\frac{y^2}{2}+y+ye^{-y}+(-y-1)e^{-y}+e^{-y}-y+1-1)dy=$$

$$= 2x\int_0^1 \frac{y^2}{2}dy = x\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2x}{6},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{x}{3} + \int_0^x (-e^{y-x})\frac{y}{3}dy = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}e^{y-x}(y-1)\Big|_0^x =$$

$$= \frac{x}{3} - \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{3}e^{-x} = \frac{2}{6}(1-e^{-x}),$$

$$q_3(x) = \int_0^1 (-x)\int_0^y (\eta - y - 1)\varphi_2(\eta)d\eta dy = \frac{2x}{6^2},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{2x}{6^2} + \int_0^x (-e^{y-x})\frac{2y}{6^2}dy = \frac{2x}{6^2} - \frac{2}{6^2}e^{y-x}(y-1)\Big|_0^x =$$

$$= \frac{2x}{6^2} - \frac{2}{6^2}(x-1) - \frac{2}{6^2}e^{-x} = \frac{2}{6^2}(1-e^{-x}),$$

……………………………………………………………..

$$\varphi_k(x) = \frac{2}{6^{k-1}}(1-e^{-x}),$$

…………………………………………………………….. .

Находим решение разрешающего уравнения

$$u(x) = -e^{-x} + 2(1-e^{-x})\lambda + \frac{2}{6}(1-e^{-x})\lambda^2 + \ldots + \frac{2}{6^{k-1}}(1-e^{-x})\lambda^k + \ldots =$$

$$= -e^{-x} + 2(1-e^{-x})\lambda(1 + \frac{\lambda}{6} + \frac{\lambda^2}{6^2} + \ldots + \frac{\lambda^{k-1}}{6^{k-1}} + \ldots) =$$

$$= -e^{-x} + 2(1-e^{-x})\lambda\frac{1}{1-\frac{1}{6}\lambda} = -e^{-x} + \frac{12\lambda}{6-\lambda}(1-e^{-x}),$$

$$u(x) = -e^{-x} + \frac{12\lambda}{6-\lambda}(1-e^{-x}).$$

Найденное выражение $u(x)$ подставляем в (2.2*) и, учитывая значения C_1, C_2, получим решение исходного уравнения

$$z(x) = \int_0^x (x-\eta)[-e^{-\eta} + \frac{12\lambda}{6-\lambda}(1-e^{-\eta})]d\eta + x + 1 =$$

$$=\int_0^x [-xe^{-\eta}+\frac{12\lambda x}{6-\lambda}(1-e^{-\eta})+\eta e^{-\eta}-\frac{12\lambda}{6-\lambda}(\eta-\eta e^{-\eta})]d\eta+x+1=$$

$$=[xe^{-\eta}+\frac{12\lambda x}{6-\lambda}(\eta+e^{-\eta})+(-\eta-1)e^{-\eta}-$$

$$-\frac{12\lambda}{6-\lambda}(\frac{\eta^2}{2}+\eta e^{-\eta}+e^{-\eta})]\Big|_0^x+x+1=$$

$$=xe^{-x}+\frac{12\lambda x^2}{6-\lambda}+\frac{12\lambda x}{6-\lambda}e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}-$$

$$-\frac{12\lambda}{6-\lambda}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{12\lambda x}{6-\lambda}e^{-x}-\frac{12\lambda}{6-\lambda}e^{-x}-x-\frac{12\lambda x}{6-\lambda}+$$

$$+1+\frac{12\lambda}{6-\lambda}+x+1=\frac{6\lambda x^2}{6-\lambda}-\frac{12\lambda}{6-\lambda}e^{-x}-\frac{12\lambda}{6-\lambda}x+\frac{12\lambda}{6-\lambda}-e^{-x}+2,$$

$$z(x)=\frac{12\lambda}{6-\lambda}(\frac{x^2}{2}-e^{-x}-x+1)-e^{-x}+2.$$

Проверка:

$$z'(x)=\frac{12\lambda}{6-\lambda}(x+e^{-x}-1)+e^{-x},\quad z''(x)=\frac{12\lambda}{6-\lambda}(1-e^{-x})-e^{-x}.$$

$$z''(x)+z'(x)=\frac{12\lambda}{6-\lambda}(1-e^{-x})-e^{-x}+\frac{12\lambda}{6-\lambda}(x+e^{-x}-1)+e^{-x}=\frac{12\lambda x}{6-\lambda},$$

$$\lambda x\int_0^1 [z'(y)+z(y)]dy=$$

$$=\lambda x\int_0^1 [\frac{12\lambda}{6-\lambda}(y+e^{-y}-1)+e^{-y}+\frac{12\lambda}{6-\lambda}(\frac{y^2}{2}-e^{-y}-y+1)-e^{-y}+2]dy=$$

$$=\lambda x\int_0^1 [\frac{6\lambda}{6-\lambda}y^2+2]dy=\lambda x(\frac{2\lambda}{6-\lambda}y^3+2y)\Big|_0^1=\lambda x(\frac{2\lambda}{6-\lambda}+2)=\frac{12\lambda x}{6-\lambda},$$

$$\frac{12\lambda x}{6-\lambda}-\frac{12\lambda x}{6-\lambda}=0,$$

т.е. имеем тождество.

Глава IV.
Приближённое решение линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма
§1. Решение начальной задачи, не опираясь на фундаментальные системы решений внешнего и внутреннего дифференциальных операторов

1. *Постановка задачи и преобразование внешнего дифференциального оператора.*

Рассмотрим задачу Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения

$$L_n[y(x)] = f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\eta)P_m[y(\eta)]d\eta,$$

$$y^{(s)}(x_0) = y_0^{(s)} \ (s=\overline{0,n-1}), \qquad \textbf{(1)}$$

где

$$L_n[y(x)] = y^{(n)}(x)+\sum_{i=1}^{n} f_i(x)y^{(n-i)}(x), \quad P_m[y(\eta)] = \sum_{i=0}^{m} b_i(\eta)y^{(m-i)}(\eta).$$

Функции f(x), $f_i(x)$ и $b_i(x)$-непрерывны $\forall$ xϵ[a,b], а ядро K(x,η)-регулярно в квадрате R[a≤x; η≤b].

Введём новую функцию $u(x) = y^{(n)}(x)$, тогда

$$y^{(i)}(x) = \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}u(t)dt+\sum_{k=0}^{n-i-1}\frac{c_{n-i-k}}{k!}(x-x_0)^k, \ i=\overline{0,n-1}, \qquad \textbf{(2)}$$

где $y^{(0)}(x) = y(x)$.

Если в (2) положить $x=x_0$, то найдём $c_{n-i}=y^{(i)}(x_0)$, $i=\overline{0,n-1}$.

Выражение внешнего дифференциального оператора $L_n[y(x)]$ через новую неизвестную функцию u(x) будет

$$L_n[y(x)] = u(x)-\int_{x_0}^{x}H_1(x,t)u(t)dt+q_1(x), \qquad \textbf{(3)}$$

где

$$H_1(x,t) = -\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{(x-t)^{i-1}}{(i-1)!}, \quad q_1(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\sum_{k=1}^{i}\frac{c_k}{(i-k)!}(x-x_0)^{i-k}.$$

Выражение внутреннего дифференциального оператора $P_m[y(\eta)]$ через новую неизвестную функцию u(x) будет зависеть от соотношения порядков внешнего и внутреннего дифференциального операторов.

2. *Случай, когда порядок внешнего дифференциального оператора больше порядка внутреннего.*

В этом случае выражение внутреннего дифференциального оператора через новую неизвестную функцию u(x) будет

$$P_m[y(\eta)] = \int_{x_0}^{\eta} H_2(\eta,t)u(t)dt + q_2(\eta), \qquad \textbf{(4)}$$

где

$H_2(\eta,t) = \sum_{i=0}^{m} \frac{b_i(\eta)(\eta-t)^{n-m-i-1}}{(n-m-i-1)!}$, $q_2(\eta) = \sum_{i=0}^{m} b_i(\eta) \sum_{k=1}^{n-m+i} \frac{c_k(\eta-x_0)^{n-m+i-k}}{(n-m+i-k)!}$.

Подставляя выражения дифференциальных операторов (3) и (4) в уравнение (1), получим разрешающее интегральное уравнение

$$u(x) = Q(x)+\lambda \int_a^b K(x,\eta) \int_{x_0}^{\eta} H_2(\eta,t)u(t)dtd\eta + \int_{x_0}^{x} H_1(x,t)u(t)dt, \qquad \textbf{(5)}$$

где

$$Q(x) = f(x)-q_1(x)+ \lambda \int_a^b K(x,\eta)q_2(\eta)d\eta.$$

Пусть R(x,t;1)-резольвента ядра $H_1(x,t)$, тогда

$$u(x) = Q_1(x)+\lambda \int_a^b K_1(x,\eta) \int_{x_0}^{\eta} H_2(\eta,t)u(t)dtd\eta, \qquad \textbf{(6)}$$

где

$$Q_1(x) = Q(x) + \int_{x_0}^{x} R(x,t;1)Q(t)dt, \; K_1(x,\eta) + \int_{x_0}^{x} R(x,t;1)K(t,\eta)dt.$$

Применив к уравнению (6) оператор V[u(x)]= $\int\limits_{x_0}^{x} H_2(x,t)u(t)dt$,

придём к интегральному уравнению Фредгольма

$$V[u(x)] = Q_2(x)+ \lambda\int\limits_a^b K_2(x,\eta)V[u(\eta)]d\eta, \qquad \mathbf{(7)}$$

где

$$Q_2(x) = \int\limits_{x_0}^{x} H_2(x,t)Q_1(t)dt,\ K_2(x,\eta) = \int\limits_{x_0}^{x} H_2(x,t)K_1(t,\eta)dt.$$

Если $K_2(x,\eta)$-регулярная функция в области квадрата R, то к уравнению (7) полностью применима теория Фредгольма [33], на основании которой могут быть сформулированы следующие теоремы:

Теорема 1. Если λ не является собственным числом ядра $K_2(x,\eta)$, то решение задачи Коши для уравнения (1) выразится формулой (2) при i=0, где u(x) находится по формуле

$$u(x) = Q_1(x)+$$

$$+\lambda\int\limits_a^b K_1(x,\eta)Q_2(\eta)d\eta+\frac{\lambda^2}{D(\lambda)}\int\limits_a^b K_1(x,\eta)\int\limits_a^b D(\eta,s;\lambda)Q_2(s)dsd\eta, \qquad \mathbf{(8)}$$

D(λ) – характеристический полином Фредгольма и D(η,s;λ) - минорный ряд Фредгольма.

Теорема 2. Если λ^*-собственное число ядра $K_2(x,\eta)$ ранга q, тогда задача Коши для уравнения (1), вообще говоря, решения не имеет. Однако, если

$$\int\limits_a^b Q_2(x)\psi_j(x)dx = 0,\ j=\overline{1,q},$$

где функции $\psi_j(x)$ представляют собой полную систему фундаментальных функций сопряжённого ядра $K_2^*(x,\eta) = K_2(\eta,x)$, принадлежащую собственному числу λ^*, то решение уравнения (1) с начальными условиями существует, зависит от q произвольных постоянных и выражается формулой (2) при i=0, с функцией u(x), равной

$$u(x)=Q_1(x)+\lambda\int_a^b K_1(x,\eta)[Q_2(\eta)+\sum_{i=1}^{q} c_i\varphi_i(\eta)]d\eta+$$

$$+\lambda\int_a^b K_1(x,\eta)\int_a^b N(\eta,s)Q_2(s)dsd\eta\,, \qquad \textbf{(9)}$$

где c_i-произвольные постоянные, $\varphi_i(x)$-полная система фундаментальных функций ядра $K_2(x,\eta)$, принадлежащая собственному числу λ^*, а $N(\eta,s)$ определяется по формуле Фредгольма

$$N(\eta,s)=\frac{D\begin{pmatrix}\eta, & \eta_1^*, & \dots & ,\eta_q^* \\ s, & s_1^*, & \dots & ,s_q^*\end{pmatrix}\lambda^*}{D\begin{pmatrix}x_1^*, & \dots & ,x_q^* \\ s_1^*, & \dots & ,s_q^*\end{pmatrix}\lambda^*},$$

$D\begin{pmatrix}x,x_1^*, & \dots & ,x_q^* \\ s,s_1^*, & \dots & ,s_q^*\end{pmatrix}\lambda^*$-детерминантные ряды Фредгольма.

3.*Случай, когда порядок внешнего дифференциального оператора меньше или равен порядку внутреннего.*

Пусть $n\le m$, $m=n+p$, $p\ge 0$. Тогда для внутреннего дифференциального оператора получим

$$P_m[y(\eta)]=\sum_{i=0}^{p} b_i(\eta)u^{(p-i)}(\eta)+q_3(\eta)+\int_{x_0}^{x} H_3(\eta,t)u(t)dt\,, \qquad \textbf{(10)}$$

где

$$q_3(\eta)=\sum_{i=1}^{n} b_{p+i}(\eta)\sum_{j=1}^{i}\frac{c_j(\eta-x_0)^{i-j}}{(i-j)!}\,,\quad H_3(\eta,t)=\sum_{i=1}^{n} b_{p+i}(\eta)\frac{(\eta-t)^{i-1}}{(i-1)!}\,.$$

Подставляя выражения (3) и (10) в уравнение (1), придём к разрешающему интегральному уравнению

$$u(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,\eta)[\sum_{i=0}^{p} b_i(\eta)u^{(p-i)}(\eta)+\int_{x_0}^{\eta} H_3(\eta,t)u(t)dt]d\eta+$$

$$+\int_{x_0}^{x} H_1(x,t)u(t)dt, \qquad \textbf{(11)}$$

где

$$F(x) = f(x)-q(x)+ \lambda\int_a^b K(x,\eta)P_2(\eta)d\eta .$$

Пусть R(x,t;1) – резольвента ядра $H_1(x,t)$, тогда

$$u(x)=F_1(x)+\lambda\int_a^b K_1(x,\eta)[\sum_{i=0}^{p} b_i(\eta)u^{(p-i)}(\eta)+\int_{x_0}^{\eta} H_3(\eta,t)u(t)dt]d\eta, \qquad \textbf{(12)}$$

где

$$F_1(x)=F(x)+\int_{x_0}^{x} R(x,t;1)F(t)dt,\; K_1(x,\eta)= K(x,\eta)+$$

$$\int_{x_0}^{x} R(x,t;1)K(t,\eta)dt .$$

Применяя оператор

$$V[u(x)] = \sum_{i=0}^{p} b_i(x)u^{(p-i)}(x)+\int_{x_0}^{x} H_3(x,t)u(t)dt$$

к уравнению (12), придём к интегральному уравнению Фредгольма

$$V[u(x)] = F_2(x)+ \lambda\int_a^b K_3(x,\eta)V[u(\eta)]d\eta, \qquad \textbf{(13)}$$

где

$$F_2(x) = \sum_{i=0}^{p} b_i(x)F_1^{(p-i)}(x)+\int_{x_0}^{x} H_3(x,t)F_1(t)dt,$$

$$K_3(x,\eta) = \sum_{i=0}^{p} b_i(x)K_1^{(p-i)}(x,\eta)+\int_{x_0}^{x} H_3(x,t)K_1(t,\eta)dt .$$

Решив уравнение (13) и подставив найденное выражение V[u(x)] в (12), найдём u(x) и, затем, в соответствии с формулами (2) при i=0, найдём решение исходного уравнения. В этом случае, как и для n>m, могут быть сформулированы аналогичные теоремы.

4. *Приближённое решение задачи Коши при n>m.*

Ввиду того, что резольвента R(x,t;1) ядра $H_1(x,t)$ не всегда находится в замкнутом виде, но всегда её можно найти приближённо, рассмотрим приближённый метод решения уравнения (1) в случае n>m. Пусть

$$|R(x,t;1)-\bar{R}(x,t;1)|\le r \qquad \textbf{(14)}$$

для a≤x; η≤b, a≤t<x, где $\bar{R}(x,t;1)$ – приближённое значение резольвенты, а r-погрешность. Обозначим через $\bar{Q}_1(x)$, $\bar{K}_1(x,\eta)$, $\bar{Q}_2(x)$ и $\bar{K}_2(x,\eta)$ соответственно приближённые значения $Q_1(x)$, $K_1(x,\eta)$, $Q_2(x)$ и $K_2(x,\eta)$ и, учитывая оценку погрешности (14), оценим разности

$$|Q_1(x)-\bar{Q}_1(x)|\le rl_1, \text{ где } l_1 = \max_{a\le x\le b}\left|\int_{x_0}^{x} Q(t)dt\right|; \qquad \textbf{(15)}$$

$$|K_1(x,\eta)-\bar{K}_1(x,\eta)|\le rl_2, \text{ где } l_2 = \max_{a\le x;\eta\le b}\left|\int_{x_0}^{x} K(t,\eta)dt\right|; \qquad \textbf{(16)}$$

$$|Q_2(x)-\bar{Q}_2(x)|\le rl_1l_3, \text{ где } l_3 = \max_{a\le x\le b}\left|\int_{x_0}^{x} H_2(x,t)dt\right|; \qquad \textbf{(17)}$$

$$|K_2(x,\eta)-\bar{K}_2(x,\eta)|\le rl_2l_3. \qquad \textbf{(18)}$$

Применяя теорему о замене ядра интегрального уравнения на близкое [20], определим погрешность решения интегрального уравнения (7)

$$|V[u(x)]-\bar{V}[u(x)]|\le \frac{N|\lambda|h(1+|\lambda|\beta)^2}{1-|\lambda|h(1+|\lambda|\beta)} + \delta(1+|\lambda|\beta) = \upsilon, \qquad \textbf{(19)}$$

где $N = \max_{a\le x\le b}|Q_2(x)| \le \max_{a\le x\le b}|\bar{Q}_2(x)| + rl_1l_3$,

$$\text{h}=\max_{a\le x\le b}\int_a^b |K_2(x,\eta)-\overline{K}_2(x,\eta)|\,d\eta \le \text{r}l_2l_3|\text{b-a}|,$$

$$\beta=\max_{a\le x\le b}\int_a^b |\overline{\Gamma}(x,\eta\ ;\lambda)|\,d\eta\,,$$

где $\overline{\Gamma}$ (x,η;λ)-приближённое значение резольвенты ядра K_2(x,η), $\delta = \max\limits_{a\le x\le b}|Q_2(x)- \overline{Q}_2(x)|=rl_1l_3$.

В соответствии с (6), используя неравенство (19), получим

$$|\,u(x)-\overline{u}(x)\,|\le rl_1+|\lambda|(\upsilon l_4+rl_2l_5), \qquad \textbf{(20)}$$

где $l_4 = \max\limits_{a\le x\le b}|\int_a^b K_1(x,\eta)d\eta\,|$, $l_5 = |\int_a^b \overline{V}(\eta)d\eta\,|$.

И окончательно, в соответствии с (2) при i=0, учитывая неравенство (20) найдём

$$|\,y(x)-\overline{y}\,(x)| = \frac{[rl_1+|\lambda|(\nu\, l_4+rl_2l_5)]l_6}{(n-1)!}\,, \qquad \textbf{(21)}$$

где $l_6 = \max\limits_{a\le x\le b}|\int_{x_0}^{x}(x-\eta\,)^{n-1}d\eta\,|$.

Нетрудно заметить, что погрешность решения, вычисленная по формуле (21), прямо пропорциональна величине r, так как δ и h, а, следовательно, и υ в (19), выражаются через r прямо пропорционально.

Пример 1. Найдём решение уравнения

$$y''+xy'=\lambda\, x\int_0^1 y(\eta)d\eta\,,$$

при $\lambda=\dfrac{1}{2}$, с начальными условиями y(0)=1, y'(0)=0.

Вводим обозначение $u = y''$, тогда $y = \int_{x_0}^{x}(x-t)u(t)dt+1$.

В соответствии с обозначениями в (5) находим

$Q(x) = (\lambda-1)x$, $H_1(x,t) = x(t-x)$ и $H_2(\eta,t) = \eta-t$.

Используя итерированные ядра, найдём

$$\overline{R}(x,t;1)=H_1(x,t)+H_{12}(x,t) = \frac{x^5}{12}-\frac{x^4t}{6}+x^2(\frac{t^3}{6}-1)+x(t-\frac{t^4}{12}),$$

причём $|R(x,t;1)-\overline{R}(x,t;1)| \le \frac{1}{504} = r$.

Далее в соответствии с обозначениями в (6) и (7) находим

$$\overline{Q}_1(x) = (\lambda-1)(x-\frac{x^4}{6}+\frac{x^7}{180}),\ \overline{K}_1(x,\eta) = x-\frac{x^4}{6}+\frac{x^7}{180},$$

$$\overline{Q}_2(x) = (\lambda-1)(\frac{x^3}{6}-\frac{x^6}{180}+\frac{x^9}{12960}),\ \overline{K}_2(x,\eta) = \frac{x^3}{6}-\frac{x^6}{180}+\frac{x^9}{12960}.$$

Определим резольвенту ядра $\overline{K}_2(x,\eta)$

$$\overline{\Gamma}(x,\eta;\lambda) = \frac{D(x,\eta;\lambda)}{D(\lambda)} = -\frac{\frac{x^3}{6}-\frac{x^6}{180}+\frac{x^9}{12960}}{1-\frac{37087}{907200}\lambda},$$

тогда приближённое решение уравнения (7) запишется

$$V[u(x)] = (\lambda-1)a(\frac{x^3}{6}-\frac{x^6}{180}+\frac{x^9}{12960}),\ \text{где } a = 1+\frac{37087\lambda}{907200-37087\lambda}.$$

Подставляя найденное решение уравнения (7) в (6) и, затем, (6) в (2) при i=0, получим

$$y(x) = (\lambda-1)(\frac{37087\lambda\, a}{907200}+1)(\frac{x^3}{6}+\frac{x^6}{180}+\frac{x^9}{12960})+1.$$

Погрешность полученного решения, подсчитанная по формуле (21), не превосходит

$$|y(x)-\overline{y}(x)| \le 0{,}0017 \text{ для всех } x\in[0,1].$$

5. *Приближённое решение задачи Коши при n≤m.*

Найдём оценку погрешности приближённого решения в случае $n\le m$, $n=m+p$. Обозначим через $\overline{R}(x,t;1)$, $\overline{F_1}(x)$, $\overline{K}_1(x,\eta)$, $\overline{F_2}(x)$, $\overline{K}_2(x,\eta)$, $\overline{V}[u(x)]$ соответственно приближённые значения $R(x,t;1)$, $F_1(x)$, $K_1(x,\eta)$, $F_2(x)$, $K_2(x,\eta)$, $V[u(x)]$. Пусть

$$|R(x,t;1)-\overline{R}(x,t;1)| = |r(x,t;1)| \le r \quad \textbf{(22)}$$

при $a\le x;\ \eta\le b$, $a\le t<x$, где $r=\max|r(x,t;1)|$.

Для подсчёта погрешности приближённого решения потребуется оценить

$$\frac{d^i\partial^j r(x,x;1)}{dx^i\partial x^j} \text{ и } \frac{\partial^j r(x,x;1)}{\partial x^j},\ i=\overline{0,p},\ j=\overline{1,p}$$

(где частные производные берутся только по первому аргументу).

Для этого воспользуемся интегральным уравнением резольвенты

$$R(x,t;1) = H_1(x,t)+\int_t^x H_1(x,s)R(s,t;1)ds \qquad \textbf{(23)}$$

и уравнением

$$\overline{R}(x,t;1) = H_1(x,t)+\int_t^x H_1(x,s)[R(s,t;1)-H_{1k}(s,t)]ds \qquad \textbf{(24)}$$

для укороченной резольвенты, справедливость которого легко доказать, расписывая $\overline{R}(x,t;1)$ через итерированные ядра.

Вычитая из уравнения (23) уравнение (24) и, затем, дифференцируя полученное равенство, последовательно можем оценить производные функции r(x,t;1)

$$\frac{d^i\partial^j r(x,x;1)}{dx^i\partial x^j}\equiv 0, \text{ а } \left|\frac{\partial^j r(x,x;1)}{\partial x^j}\right| \le r_j,\ j=\overline{1,p}. \qquad \textbf{(25)}$$

Используя соотношения (22) и (25), найдём

$$|F_1(x)-\overline{F_1}(x)|^{(i)} \le r_i q_1,\ i=\overline{0,p}, \text{ где } q_1 = \max_{a\le x\le b}\left|\int_{x_0}^x F(t)dt\right| \text{ и } r_0=r; \qquad \textbf{(26)}$$

$$|K_1(x,\eta)-\overline{K}_1(x,\eta)|_x^{(i)} \le r_i q_2,\ i=\overline{0,p}, \text{ где } q_2 = \max_{a\le x;\ \eta\le b}\left|\int_{x_0}^x K(t,\eta)dt\right|. \qquad \textbf{(27)}$$

Далее, учитывая оценки погрешностей (26) и (27), получим оценки

$$|F_2(x)-\overline{F_2}(x)| \le \left(\sum_{i=0}^p r_{p-i}\beta_i + rq_3\right)q_1, |K_3(x,\eta)\overline{K}_3(x,\eta)| \le$$

$$\leq(\sum_{i=0}^{p} r_{p-i}\beta_i + rq_3)q_1, \qquad \textbf{(28)}$$

где $\beta_i = \max\limits_{a\leq x\leq b}|b_i(x)|$, $q_3 = \max|\int\limits_{x_0}^{x} H_3(x,t)dt|$.

Применяя теорему о замене ядра интегрального уравнения на близкое [1], определим погрешность приближённого решения уравнения (13)

$$|V[u(x)]-\overline{V}[u(x)]|\leq\frac{N|\lambda|h(1+|\lambda|\beta)^2}{1-|\lambda|h(1+|\lambda|\beta)}+\delta(1+|\lambda|\beta)=\sigma, \qquad \textbf{(29)}$$

где $N = \max\limits_{a\leq x\leq b}|F_2(x)|\leq\max\limits_{a\leq x\leq b}|\overline{F_2}(x)|+(\sum_{i=0}^{p} r_{p-i}\beta_i + rq_3)q_1$,

$$h = \max_{a\leq x\leq b}\int_a^b|K_3(x,\eta)-\overline{K}(x,\eta)|d\eta\leq(\sum_{i=0}^{p} r_{p-i}\beta_i + rq_3)q_2|b-a|,$$

$\beta = \max\limits_{a\leq x\leq b}\int\limits_a^b|\overline{\Gamma}(x,\eta;\lambda)|d\eta$ ($\overline{\Gamma}(x,\eta;\lambda)$ - резольвента ядра $\overline{K}_3(x,\eta)$),

$$\delta = \max_{a\leq x\leq b}|F_2(x)-\overline{F_2}(x)| = (\sum_{i=0}^{p} r_{p-i}\beta_i + rq_3)q_1.$$

В соответствии с (12), используя неравенство (29), получим

$$|u(x)-\overline{u}(x)|\leq rq_1+|\lambda|(\sigma q_4+rq_2q_5), \qquad \textbf{(30)}$$

где $q_4 = \max\limits_{a\leq x\leq b}|\int\limits_a^b K_1(x,\eta)d\eta|$, $q_5 = |\int\limits_a^b \overline{V}(\eta)d\eta|$.

И окончательно, в соответствии с (2) при i=0, учитывая неравенство (30), найдём

$$|y(x)-\overline{y}(x)|\leq\frac{[rq_1+|\lambda|(\sigma q_4+rq_2q_5]q_6}{(n-1)!}, \qquad \textbf{(31)}$$

где $q_6 = \max\limits_{a\leq x\leq b}|\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}dt|$, т.е. для оценки погрешности получена аналогичная формула, что и в случае n>m.

Пример 2. Найдём решение задачи Коши

$$y'' + \frac{x}{25} y' = (x+\frac{x^3}{50}) \int_0^1 y'''(\eta) d\eta \text{; } y(1)=0, \ y'(1)=1.$$

Вводим обозначение $u = y''$, тогда

$$y' = \int_1^x u(t)dt + 1 \text{, } y = \int_1^x (x-t)u(t)dt + x - 1.$$

В соответствии с обозначениями в (11) находим

$$F(x) = -\frac{x}{25}, \ H_3(\eta, t) = 0, \ H_1(x,t) = -\frac{x}{25}.$$

Возьмём $\overline{R}(x,t;1) = -\frac{x}{25}$, тогда $|R(x,t;1) - \overline{R}(x,t;1)| \le \frac{1}{1250} = r$.

Далее в соответствии с обозначениями в (12) и (13) находим

$$\overline{F_1}(x) = \frac{x^3 - 51x}{1250}, \ \overline{K}_1(x,\eta) = \frac{5101x - x^5}{5000},$$

$$\overline{F_2}(x) = \frac{3x^2 - 51}{1250}, \ \overline{K}_2(x,\eta) = \frac{5101 - 5x^4}{5000}.$$

Определяем резольвенту ядра $\overline{K}_2(x,\eta)$

$$\overline{\Gamma}(x,\eta;\lambda) = \frac{D(x,\eta;\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{5x^4 - 5101}{100}$$

и приближённое решение уравнения (13) запишется

$$\overline{V}(x) = \frac{4999x}{2500} + \frac{x^3}{1250} - \frac{x^5}{2500}.$$

Подставляя найденное решение уравнения (13) в формулу (12) и, затем, решение (12) в формулу (2) при i=0, получим

$$\overline{y}(x) = -\frac{21877}{65625} + \frac{x}{15000} + \frac{4999x^3}{15000} + \frac{x^5}{2500} - \frac{x^7}{105000}$$

Вычитая из уравнения (23) уравнение (24) и дифференцируя обе части полученного равенства, найдём

$$|\frac{\partial r(x,t;1)}{\partial x}| \le 0{,}0025 = r_1.$$

Вычислив q_1, q_2, q_3, σ, q_4, q_5, q_6 по формулам (26), (27), (28), (29), (30), (31) для погрешности полученного решения по формуле (31) находим оценку

$$|y(x)-\bar{y}(x)| \le 0{,}0067 \text{ для всех } x \in [0,1].$$

Зная точное решение исходного уравнения $y=\frac{x^3-1}{3}$, можно найти более точную оценку погрешности полученного решения

$$|y(x)-\bar{y}(x)| \le 0{,}0001 \text{ для всех } x \in [0,1].$$

§2 *Решение краевой задачи*

1. *Постановка задачи и преобразование производных*

Рассмотрим краевую задачу для линейного интегро-дифференциального уравнения

$$L_n[y(x)] = f(x)+\lambda\int_a^b \sum_{i=0}^{m} K_i(x,\eta)y^{(m-i)}(\eta)d\eta, \qquad \textbf{(1)}$$

где

$$L_n[y(x)] = y^{(n)}(x)+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)y^{(n-i)}(x),$$

с линейными краевыми условиями

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{ij}y^{(i)}(x_0)+\beta_{ij}y^{(i)}(x_1)] = \gamma_j,\ j=\overline{0,n-1} \qquad \textbf{(2)}$$

причем $x_0 \in [a,b]$ и $x_1 \in [a,b], x_0 < x_1$. Функции $f(x)$ и $a_i(x)$ - непрерывны при любом $x \in [a,b]$, а ядра $K_i(x,\eta)$ - регулярны в области $R\begin{bmatrix} a \le x \le b \\ a \le \eta \le b \end{bmatrix}$. Коэффициенты α_{ij}, β_{ij} и γ_j - постоянные числа.

Задача (1)-(2) решалась рядом авторов [9],[14],[23],[26]-[28] и др. Покажем, что решение задачи (1)-(2) может быть сведено к решению задачи Коши при начальном значении x_0 (или x_1), что дает эффективный приближенный метод решения краевой задачи для уравнения (1), если возникают трудности при отыскании решения в замкнутом виде. Отметим, что в этом методе не надо, как это обычно делается, предполагать дифференцируемость ядер по x в случае $n \le m$.

Введем новую функцию $y^{(n)}(x) = u(x)$, тогда

$$y^{(i)}(x) = \frac{1}{(n-i-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-i-1}u(t)dt + \sum_{k=0}^{n-i-1}\frac{C_{n-i-k}}{k!}(x-x_0)^k , \qquad \mathbf{(3)}$$

$i = \overline{0, n-1}$, где $y^{(0)}(x) = y(x)$.

Если в (3) положить $x = x_0$, то получим $y^{(i)}(x_0) = C_{n-i}$ и соотношения (3) перепишутся так:

$$y^{(i)}(x) = \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}u(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1-i}\frac{y^{(i+k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k , i = \overline{0, n-1} . \ \mathbf{(4)}$$

При $x = x_1$ из (4) имеем

$$y^{(i)}(x_1) = \int_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}u(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1-i}\frac{y^{(i+k)}(x_0)}{k!}(x_1-x_0)^k , i = \overline{0, n-1} . \mathbf{(5)}$$

Подставляем выражения для производных $y^{(i)}(x_1)$ (5) в условия (2)

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{ij}y^{(i)}(x_0) + \beta_{ij}\sum_{k=0}^{n-1-i}\frac{y^{(i+k)}(x_0)}{k!}(x_1-x_0)^k] =$$

$$\gamma_j - \sum_{i-0}^{n-1}\frac{\beta_{ij}}{(n-i-1)!}\int_{x_0}^{x_1}(x_1-t)^{n-i-1}u(t)dt,$$

$j = \overline{0, n-1}$ или, группируя члены с одноимёнными производными, получим систему n линейных неоднородных алгебраических уравнений с неизвестными $y^{(i)}(x_0), i = \overline{0, n-1}$.

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{ij} + \sum_{k=0}^{i}\beta_{kj}\frac{(x_1-x_0)^{i-k}}{(i-k)!}]y^{(i)}(x_0) =$$

$$\gamma_i - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta_{ij}}{(n-i-1)!} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - t)^{n-i-1} u(t)dt,\ j = \overline{0, n-1}. \qquad \textbf{(6)}$$

Обозначим определитель этой системы через Δ

$$\Delta = \det[\alpha_{ij} + \sum_{k=0}^{i} \beta_{kj} \frac{(x_1 - x_0)^{i-k}}{(i-k)!}].$$

Пусть $\Delta \neq 0$, тогда , обозначив через Δ_{ij} миноры определителя Δ с их знаками, получим

$$y^{(i)}(x_0) = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} [\gamma_j - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_{kj}}{(n-k-1)!} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - t)^{n-k-1} u(t)dt] \Delta_{ij}}{\Delta}, \qquad \textbf{(7)}$$

$i = \overline{0, n-1}$

2. *Случай, когда порядок внешнего дифференциального оператора больше порядка внутреннего.*

Найдем выражения $L_n[y(x)]$ и $\sum_{i=0}^{m} K_i(x,\eta) y^{(m-i)}(\eta)$ через новую функцию $u(x)$

$$L_n[y(x)] = u(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} H_1(x,t)u(t)dt + \Phi_1(x) - \lambda \int_{x_0}^{x_1} N_1(x,t)u(t)dt, \qquad \textbf{(8)}$$

где

$$H_1(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(x)(x-t)^{i-1}}{\lambda(i-1)!},$$

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\gamma_j \Delta_{ij}}{\Delta} \sum_{k=0}^{i} a_{n-i-k}(x) \frac{(x-x_0)^k}{k!}],$$

$$N_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_{kj}(x_1 - t)^{n-k-1} \Delta_{ij}}{\lambda \Delta (n-k-1)!} \sum_{k=0}^{i} a_{n-i+k}(x) \frac{(x-x_0)^k}{k!}];$$

$$\sum_{i=0}^{m} K_i(x,\eta) y^{(m-i)}(\eta) = \int_{x_0}^{\eta} H_2(x,\eta,t)u(t)dt + \Phi_2(x,\eta) -$$

$$-\int_{x_0}^{x_1} N_2(x,\eta,t)u(t)dt, \tag{9}$$

где

$$H_2(x,\eta,t)=\sum_{i=0}^{m}\frac{K_i(x,\eta)(\eta-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!},\quad \Phi_2(x,\eta)=\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_i(x,\eta)\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\gamma_j\Delta_{ij}}{\Delta},$$

$$N_2(x,\eta,t)=\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_i(x,\eta)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\beta_{kj}(x_1-t)^{n-k-1}}{\Delta(n-k-1)!}$$ и

$$\varphi_i(x,\eta)=\frac{K_m(x,\eta)(\eta-x_0)^i}{i!}+\frac{K_{m-1}(x,\eta)(\eta-x_0)^{i-1}}{(i-1)!}+\cdots+$$
$$+\frac{K_0(x,\eta)(\eta-x_0)^{i-m}}{(i-m)!}.$$

Подставляя выражения (8) и (9) в уравнение (1), придем к интегральному уравнению смешанного типа Вольтерра - Фредгольма

$$u(x)+\lambda\int_{x_0}^{x}H_1(x,t)u(t)dt+\Phi_1(x)-\lambda\int_{x_0}^{x_1}N_1(x,t)u(t)dt=$$
$$=f(x)+\lambda\int_a^b\int_{x_0}^{\eta}H_2(x,\eta,t)u(t)dtd\eta+\lambda\int_a^b\Phi_2(x,\eta)d\eta-$$
$$-\lambda\int_a^b\int_{x_0}^{x_1}N_2(x,\eta,t)u(t)dt$$

или в операторной форме

$$u=\lambda Ku+F, \tag{10}$$

где

$$u(x)=u(x), F=f(x)+\lambda\int_a^b\Phi_2(x,\eta)d\eta-\Phi_1(x),$$

$$Ku=\int_a^b\int_{x_0}^{\eta}H_2(x,\eta,t)u(t)dt-\int_a^b\int_{x_0}^{x_1}N_2(x,\eta,t)u(t)dt+\int_{x_0}^{x_1}N_1(x,t)u(t)dt-$$
$$-\int_{x_0}^{x}H_1(x,t)u(t)dt.$$

Докажем, что для достаточно малых значений λ оператор $Vu=\lambda Ku+F$ есть оператор сжатия. Определим норму функции $u(x)$ в метрическом пространстве R равенством

$$\|u(x)\|=\max_{a\le x\le d}|u(x)|, \qquad (11)$$

Тогда

$$\|K\|=\max_{a\le x\le b}\left\{\left|\int_a^b\int_{x_0}^{\eta}H_2(x,\eta,t)dtd\eta\right|+\left|\int_a^b\int_{x_0}^{x_1}N_2(x,\eta,t)dtd\eta\right|+\left|\int_{x_0}^{x_1}N_1(x,t)dt\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\int_{x_0}^{x}H_1(x,t)dt\right|\right\}.$$

Возьмем две произвольные функции $u_1(x),u_2(x)$, определённые в R и рассмотрим расстояние

$\rho(Vu_1,Vu_2)=\|(\lambda Ku_1+F)-(\lambda Ku_2+F)\|=|\lambda|\|K(u_1-u_2)\|$

$\le|\lambda|\cdot\|K\|\cdot\|u_1-u_2\|=\alpha\rho(u_1,u_2)$, где $\alpha=|\lambda|\|K\|$.

Следовательно, если $\alpha<1$, т.е. $|\lambda|<\dfrac{1}{\|K\|}$, то V- оператор сжатия и, в соответствии с теоремой Банаха [15], для уравнения (10) имеется единственная неподвижная точка, которая может быть найдена методом последовательных приближений. При этом, если за начальное приближение взять $u_0=F(x)$, то для погрешности приближенного решения уравнения (10)

$$u(x)=u_l(x)=F+\lambda KF+\lambda^2K^2F+\cdots+\lambda^lK^lF \qquad \textbf{(12)}$$

получим оценку

$$|u(x)-u_l(x)|\le\frac{\alpha^{l+1}\|F\|}{1-\alpha}. \qquad \textbf{(13)}$$

Подставляя полученное выражение для $u(x)$ (12) в (4), найдем решение исходного уравнения

$$y(x) \approx y_l(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u_l(t)dt + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i, \quad \textbf{(14)}$$

где $y^{(i)}(x_0)$ находится по формулам (7).

Принимая во внимание оценку погрешности (13), подсчитаем погрешность полученного решения

$$\left| y(x) - y_l(x) \right| = \left| \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}[u(t)-u_l(t)]dt - \right.$$

(15)

$$\left. -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^i}{i!} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\beta_{kj}\Delta_{ij}(x_1-t)^{n-k-1}}{\Delta(n-k-1)!}[u(t)-u_l(t)]dt \right| \le \frac{\alpha^{l+1}\|F\|}{1-\alpha}\upsilon,$$

где

$$\upsilon = \max_{a \le x \le b}\left\{ \left| \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \right| + \left| \sum_{i-0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^i}{i!} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\beta_{kj}\Delta_{ij}(x_1-t)^{n-k-1}}{\Delta \cdot (n-k-1)!} dt \right| \right\}.$$

<u>Пример 1.</u> Решим уравнение

$$y'' + (\tfrac{1}{2} - x)y' + y = \int_0^1 y(\eta)d\eta \quad \textbf{(1*)}$$

с краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} y(0) - 2y'(1) = -1 \\ 2y(0) - y'(1) = 1 \end{aligned}\right\}. \quad \textbf{(2*)}$$

В соответствии с формулами (4) имеем

$$y''(x) = u(x), y'(x) = \int_0^x u(t)dt + y'(0),$$

$$y(x)=\int_0^x (x-t)u(t)dt + xy'(0)+y(0)\,. \qquad \textbf{(4*)}$$

Находим $y'(1)=\int_0^1 u(t)dt + y'(0)$ и подставляем в краевые условия (2*)

$$\left.\begin{aligned} y(0)-2y'(1) &= -1+2\int_0^1 u(t)dt \\ 2y(0)-y'(1) &= 1+\int_0^1 u(t)dt \end{aligned}\right\},$$

откуда

$$y(0)=1, y'(0)=1-\int_0^1 u(t)dt\,. \qquad \textbf{(7*)}$$

Подставляя полученные выражения из (7*) в (4*)

$$y'(x)=\int_0^x u(t)dt + 1-\int_0^1 u(t)dt, y(x)=\int_0^x (x-t)u(t)dt + x - x\int_0^1 u(t)dt + 1 \qquad \textbf{(4**)}$$

и, затем, (4**) в уравнение (1*), придем к разрешающему уравнению

$$u(x)=\int_0^1\int_0^\eta (\eta-t)u(t)dtd\eta + \int_0^x (t-\tfrac{1}{2})u(t)dt\,. \qquad \textbf{(10*)}$$

Докажем, что $Vu=\int_0^1\int_0^\eta (\eta-t)u(t)dt\eta + \int_0^x (t-\tfrac{1}{2})u(t)dt$ - оператор сжатия. Для этого найдем сначала

$$\|K\|=\max_{a\le x\le b}\left\{\left|\int_0^1\int_0^\eta (\eta-t)dt\eta\right| + \left|\int_0^x (t-\tfrac{1}{2})dt\right|\right\}=\frac{7}{24},$$

$\alpha = |\lambda| \|K\| = \frac{7}{24} < 1$. Следовательно V - оператор сжатия и уравнение (10*) имеет единственное решение, а так как это уравнение однородное, то это решение будет $u(x) \equiv 0$. Подставляя это решение в (4*), получим $y(x) = \int_0^x (x-t) \cdot 0 dt - x \int_0^1 0 dt + x + 1.$

Т.е. точное решение будет $y(x) = x + 1$. Действительно, зная общее решение $y(x) = c_1 + c_2 x$ уравнения (1*), легко это проверить.

3.*Случай, когда порядок внутреннего дифференциального оператора равен или больше порядка внешнего.*

Рассмотрим теперь случай n≤m, m=n+p, p≥0.

Выражение для $L_n[y(x)]$ через новую функцию $u(x)$ будет тем же, что и в случае $n > m$. Найдем выражение для

$$\sum_{i=0}^{m} K_i(x,\eta) y^{(m-i)}(\eta) = \sum_{i=0}^{p} K_i(x,\eta) y^{(p-i)}(\eta) + \sum_{i=p+1}^{m} K_i(x,\eta) y^{(m-i)}(\eta).$$

Для первой суммы имеем

$$\sum_{i=0}^{p} K_i(x,\eta) y^{(p-i)}(\eta) = \sum_{i=0}^{p} K_i(x,\eta) u^{(p-i)}(\eta), \qquad \textbf{(16)}$$

а вторая сумма аналогична выражению $L_n[y(x)]$, только вместо коэффициентов $a_i(x)$ стоят коэффициенты $K_i(x,\eta)$, поэтому в соответствии с (8) можем записать

$$\sum_{i=p+1}^{m} K_i(x,\eta) y^{(m-i)}(\eta) = \int_{x_0}^{\eta} H_3(x,\eta,t) u(t) dt + \Phi_3(x,\eta) -$$

$$- \int_{x_0}^{x_1} N_3(x,\eta,t) u(t) dt, \qquad \textbf{(17)}$$

где

$$H_3(x,\eta,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_{p+i}(x,\eta)(\eta - t)^{i-1}}{(i-1)!};$$

$$\Phi_3(x,\eta)=\sum_{i=0}^{n-1}[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\gamma_j\Delta_{ij}}{\Delta}\sum_{k=0}^{i}K_{m-i+k}(x,\eta)\frac{(\eta-x_0)^k}{k!}],$$

$$N_3(x,\eta,t)=\sum_{i=0}^{n-1}[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\beta_{kj}(x_1-t)^{n-k-1}\Delta_{ij}}{\Delta(n-k-1)!}\cdot\sum_{k=0}^{i}K_{m-i-k}(x,\eta)\frac{(\eta-x_0)^k}{k!}].$$

Подставляя выражения (8), (16) и (17) в уравнение (1) придем к уравнению

$$u(x)+\lambda\int_{x_0}^{x}H_1(x,t)u(t)dt+\Phi_1(x)-\lambda\int_{x_0}^{x_1}N_1(x,t)u(t)dt=f(x)+$$

$$+\lambda\int_a^b\int_{x_0}^{\eta}H_3(x,\eta,t)u(t)dt+\lambda\int_a^b\Phi_3(x,\eta)d\eta-\lambda\int_a^b\int_{x_0}^{x_1}N_3(x,\eta,t)u(t)dtd\eta+$$

$$+\lambda\int_a^b\sum_{i=0}^{p}K_i(x,\eta)u^{(p-i)}(\eta)d\eta$$

или в операторной форме

$$u=\lambda Nu+\Phi\,, \qquad \textbf{(18)}$$

где

$$u=u(x),\Phi=f(x)+\lambda\int_a^b\Phi_3(x,\eta)d\eta-\Phi_1(x) \text{ и}$$

$$Nu=\int_a^b\int_{x_0}^{\eta}H_3(x,\eta,t)u(t)dtd\eta-\int_a^b\int_{x_0}^{x_1}N_3(x,\eta,t)u(t)dtd\eta+$$

$$+\int_a^b\sum_{i=0}^{p}K_i(x,\eta)u^{(p-i)}(\eta)d\eta-\int_{x_0}^{x}H_1(x,t)u(t)dt+\int_{x_0}^{x_1}N_1(x,t)u(t)dt.$$

Докажем, что для достаточно малых значений λ оператор $Vu=\lambda Nu+\Phi$ есть оператор сжатия.

Определим норму функции $u(x)$ в метрическом пространстве R равенством

$$\|u(x)\|=\max_{a\le x\le b}\sum_{i-0}^{p}\left|u^{(i)}(x)\right|, \qquad \textbf{(19)}$$

тогда

$$\|N\| = \max_{a \le x \le b}\{\left|\int_a^b \int_{x_0}^{\eta} H_3(x,\eta,t)dtd\eta\right| + \left|\int_a^b \int_{x_0}^{x_1} N_3(x,\eta,t)dtd\eta\right| +$$

$$+\left|\int_{x_0}^{x} H_1(x,t)dt\right| + \left|\int_{x_0}^{x_1} N_1(x,t)dt\right| \ \} + (p+1)(b-a)\sup_i \max_{a \le x,\eta \le b}|K_i(x,\eta)|.$$

Для двух произвольных функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$ рассмотрим расстояние

$$\rho(Vu_1, Vu_2) = \|(\lambda N u_1 + \varPhi) - (\lambda N u_2 + \varPhi)\| = |\lambda| \cdot \|N(u_1 - u_2)\| \le$$

$\le |\lambda|\|N\| \cdot \|u_1 - u_2\| = \alpha \cdot \rho(u_1, u_2)$, где $\alpha = |\lambda| \cdot \|N\|$.

Следовательно, если $\alpha < 1$, т.е. $|\lambda| < \dfrac{1}{\|N\|}$, то V- оператор сжатия и к уравнению (18) применима теорема Банаха [15]. При этом, если за начальное приближение взять $u_0 = \varPhi(x)$, то для погрешности приближенного решения

$$u(x) \approx u_l(x) = \varPhi + \lambda N \varPhi + \lambda^2 N^2 \varPhi + \cdots + \lambda^l N^l \varPhi \qquad \textbf{(20)}$$

получаем оценку

$$|u(x) - u_l(x)| \le \frac{\alpha^{l+1}\|\varPhi\|}{1-\alpha} \qquad \textbf{(21)}$$

Подставляя полученное выражение для $u(x)$ из (20) в (4), найдем решение исходного уравнения в форме (14), при этом погрешность приближенного решения может быть подсчитана по формуле (15), где следует заменить $\|F\|$ на $\|\varPhi\|$ и норму понимать в соответствии с определением в (19), т.е.

$$|y(x) - y_l(x)| \le \frac{\alpha^{l+1}\|\varPhi\|}{1-\alpha}\upsilon, \qquad \textbf{(22)}$$

где υ то же, что и в (15).

<u>Пример 2.</u> Найдем решение уравнения

$$y'' + \lambda x y = \lambda x \int_0^1 y'''(\eta)d\eta \qquad \textbf{(1*)}$$

с краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} y(0)+y(1)=1 \\ y(0)-y(1)=0 \end{aligned}\right\}. \qquad \textbf{(2*)}$$

В соответствии с (4) имеем

$$y''(x)=u(x), y'(x)=\int_0^x u(t)dt+y'(0),$$

$$y(x)=\int_0^x (x-t)u(t)dt+xy'(0)+y(0). \qquad \textbf{(4*)}$$

Находим $y(1)=\int_0^1 (1-t)u(t)dt+y'(0)+y(0)$ и подставляем в краевые условия (2*)

$$\left.\begin{aligned} 2y(0)+y'(0)=1-\int_0^1 (1-t)u(t)dt \\ -y'(0)=\int_0^1 (1-t)u(t)dt \end{aligned}\right\},$$

откуда

$$y'(0)=-\int_0^1 (1-t)u(t)dt, y(0)=\frac{1}{2} \qquad \textbf{(7*)}$$

Подставляя (7*) в (4*)

$$y'(x)=\int_0^x u(t)dt-\int_0^1 (1-t)u(t)dt,$$

$$y(x)=\int_0^x (x-t)u(t)dt-x\int_0^1 (1-t)u(t)dt+\tfrac{1}{2}. \qquad \textbf{(4*)}$$

и, затем, (4*) в уравнение (1*), придем к разрешающему интегральному уравнению

$$u(x)=-\frac{\lambda x}{2}-\lambda x\int_0^x (x-t)u(t)+\lambda x^2\int_0^1 (1-t)u(t)dt+\lambda x\int_0^1 u'(\eta)d\eta. \qquad \textbf{(18*)}$$

Определив норму функции $u(x)$ равенством

$$\|u(x)\| = \max_{0\le x\le 1}\left\{|u(x)| + |u^{'}(x)|\right\},$$

найдем

$$\|N\| = \max_{0\le x\le 1}\left\{\left|x\int_0^x (x-t)dt\right| + \left|x^2\int_0^1 (1-t)dt\right| + \left|x\int_0^1 d\eta\right|\right\} = 2.$$

Следовательно для $|\lambda| < \frac{1}{\|N\|} = \frac{1}{2}$, в уравнении (18*) оператор справа есть оператор сжатия и к этому уравнению применима теорема Банаха.

Найдем решение уравнения (18*) методом последовательных приближений при $\lambda = \frac{1}{5}$. Возьмем $u_0 = -\frac{x}{10}$ и в соответствии с (20) определим первое приближение решения $u(x)$

$$u_1(x) = \frac{x^4}{300} - \frac{x^2}{300} - \frac{3x}{25}. \qquad \textbf{(20*)}$$

Посчитаем погрешность полученного решения разрешающего уравнения по формулам (21)

$$|u(x) - u_l(x)| \le \frac{\alpha^{l+1}\|\Phi\|}{1-\alpha},$$

$$\alpha = |\lambda|\cdot\|N\| = \frac{2}{3}, \quad \|\Phi\| = \left\|-\frac{\lambda x}{22}\right\| = \frac{1}{5},$$

$$|u(x) - u_1(x)| \le \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{4}{75}.$$

Подставив (20*) в (4*), найдем приближенное решение исходного уравнения

$$y_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{121}{6000}x - \frac{x^3}{50} - \frac{x^4}{3600} + \frac{x^6}{9000}.$$

Посчитаем погрешность по формуле (22)

$$|y(x)-y_1(x)| \le \frac{\alpha^2\|\Phi\|}{1-\alpha}\nu,$$

$$\nu=\max_{0\le x\le 1}\left\{\left|\int_0^x (x-t)dt\right|+\left|x\int_0^1(1-t)dt\right|\right\}=1,\ |y(x)-y_1(x)|\le\frac{4}{75}.$$

Глава V.
Линейные интегродифференциальные уравнения Фредгольма с отклоняющимся аргументом

§1. Классификация линейных интегродифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Рассмотрим общий вид линейных интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

$$\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}[f_{ij}(x)y^{(i)}(u_j(x))+\lambda\int_a^b K_{ij}(x,\eta)y^{(i)}(u_j(\eta))d\eta]=f(x), \qquad \textbf{(1)}$$

где

$u_0(x)\equiv x, f_{ij}(x)$ и $u_j(x)$ - непрерывны, ядра $K_{ij}(x,\eta)$ - регулярны в квадрате $a\le x,\eta\le b.$

При $u_j(x)\le x$ уравнения вида (1)- уравнения с запаздывающим аргументом.

Различные соотношения порядков внешнего и внутреннего дифференциальных операторов получим при равенстве нулю некоторых коэффициентов $f_{ij}(x)$ и ядер $K_{ij}(x,\eta)$ при старших производных. Все рассуждения и выкладки проведем считая порядок внешнего дифференциального оператора больше или равным порядку внутреннего. В противном случае уравнение можно предварительно продифференцировать достаточное число раз.

По аналогии с классификацией дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [19], проведем классификацию уравнений вида (1):

Определение 1.

а) Уравнения запаздывающего типа получим из общего вида (1), если аргументы $u_j(x)$ $\forall j=\overline{1,l}$ входят только в функцию и ее производные до (n-1)-го порядка включительно, т.е. в уравнении (1) $f_{nj}(x)\equiv 0$ и $K_{nj}(x,\eta)\equiv 0$ $\forall j=\overline{1,l}$, а $f_{n0}(x)\not\equiv 0$ и, следовательно, можно считать что $f_{n0}(x)\equiv 1$.

Определение 2.

б) Уравнения нейтрального типа получим из общего вида (1), если существует хотя бы один аргумент $u_j(x)$, $j=\overline{1,l}$ входящий в производную n-го порядка и при этом есть член со старшей производной от аргумента x, т.е. в уравнении (1) $f_{n0}(x)\not\equiv 0$ и $\exists j\neq 0,$ для которого $f_{nj}(x)\not\equiv 0$ и $K_{nj}(x,\eta)\not\equiv 0$ одновременно или по отдельности.

Определение 3.

в) Уравнения опережающего типа получим из общего вида (1), если аргументы $u_j(x), j=\overline{1,l}$, хотя бы для некоторых j, входят в производные более высокого порядка, чем аргумент x, т.е. в уравнении (1) $f_{n0}(x)\equiv 0$ и $\exists j\neq 0$ что $f_{nj}(x)\not\equiv 0.$

§2. Функции гибкой структуры (ФГС) и их применение к решению различных задач

Любую непрерывную n раз дифференцируемую функцию можно представить с помощью ФГС [24]-[25], следовательно решение начальных и краевых задач для уравнения (1) можем искать в виде одной из модификаций ФГС.

$$y(x)=D^{-1}[\sum_{s=1}^{n}y^{(s-1)}(x_0)\Delta_s(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}\Delta_n(x-t)\mu(t)dt], \qquad \textbf{(2)}$$

где $D=D(r_1,r_2,\ldots,r_n)$ - определитель Вандермонда, составленный из неопределенных параметров $r_1,r_2,\ldots,r_n$, которые определяются в ходе решения задачи исходя из оптимальности ее решения,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

определитель $\Delta_s(x-t), s=\overline{1,n}$ получается из определителя D заменой s-ой строки строкой
$\exp r_1(x-t), \exp r_2(x-t), \dots, \exp r_n(x-t)$ и $\mu(x)$ - новая неизвестная функция.

Для производных искомого решения, записанного в форме (2) получим следующие выражения

$$y^{(i)}(x) = D^{-1}[\sum_{s=1}^{n} y^{(s-1)}(x_0)\Delta_s^{(i)}(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^i \Delta_n(x-t)}{\partial x^i}\mu(t)dt], \qquad \mathbf{(3)}$$

$i=\overline{1,n-1}$,

$$y^{(n)}(x) = D^{-1}[\sum_{s=1}^{n} y^{(s-1)}(x_0)\Delta_s^{(n)}(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^n \Delta_n(x-t)}{\partial x^n}\mu(t)dt] + \mu(x). \qquad \mathbf{(4)}$$

Как известно, функции гибкой структуры для достаточное число раз дифференцируемых функций при определенных значениях параметров дают их разложение по всем известным формулам (Лагранжа, Тейлора, Маклорена), а также в ряды (степенные, тригонометрические, Фурье и т.д.). Так как параметры вначале не зафиксированы, то их величина, а следовательно и окончательная форма представления решения устанавливается в ходе решения задачи. Естественно что таких форм бесконечное множество и наша задача сделать оптимальный выбор.

Причём параметры r_p, $p=\overline{1,n}$ можно брать и равными. При этом отношения $D^{-1}\frac{\partial^i \Delta_s(x-t)}{\partial x^i}$ следует заменить их пределами $\lim\limits_{r_n \to r_1} D^{-1}\frac{\partial^i \Delta_s(x-t)}{\partial x^i}$ в силу того, что при равных значениях уже двух параметров определитель Д=0, а рассматриваемые отношения имеют вполне определённые значения, вычисляемые по правилу Лопиталя.

Рассмотрим пределы отношений $\lim\limits_{r_2\to r_1} D^{-1}\dfrac{\partial^i \Delta_s(x-t)}{\partial x^i}$ при двух параметрах $r_2 \to r_1$:

$$\lim_{r_2\to r_1}\frac{\Delta_1(x-t)}{D}=\lim_{r_2\to r_1}\frac{r_2 e^{r_1(x-t)}-r_1 e^{r_2(x-t)}}{r_2-r_1}=\lim_{r_2\to r_1}\frac{e^{r_1(x-t)}-r_1(x-t)e^{r_2(x-t)}}{1}=$$

$$=e^{r_1(x-t)}(1-r_1(x-t)),$$

$$\lim_{r_2\to r_1}\frac{\Delta_2(x-t)}{D}=\lim_{r_2\to r_1}\frac{e^{r_2(x-t)}-e^{r_1(x-t)}}{r_2-r_1}=\lim_{r_2\to r_1}\frac{(x-t)e^{r_2(x-t)}}{1}=(x-t)\,e^{r_1(x-t)},$$

$$\lim_{r_2\to r_1}\frac{\partial\Delta_1(x-t)}{\partial x}D^{-1}=\lim_{r_2\to r_1}\frac{r_1 r_2 e^{r_1(x-t)}-r_1 r_2 e^{r_2(x-t)}}{r_2-r_1}=$$

$$=\lim_{r_2\to r_1}\frac{r_1 e^{r_1(x-t)}-(x-t)r_1 r_2 e^{r_2(x-t)}-r_1 e^{r_2(x-t)}}{1}=e^{r_1(x-t)}(-r_1^2(x-t)),$$

$$\lim_{r_2\to r_1}\frac{\partial\Delta_2(x-t)}{\partial x}D^{-1}=\lim_{r_2\to r_1}\frac{r_2 e^{r_2(x-t)}-r_1 e^{r_1(x-t)}}{r_2-r_1}=$$

$$=\lim_{r_2\to r_1}\frac{e^{r_2(x-t)}+r_2(x-t)e^{r_2(x-t)}}{1}=e^{r_1(x-t)}(1+r_1(x-t)),$$

$$\lim_{r_2\to r_1}\frac{\partial^2\Delta_1(x-t)}{\partial x^2}D^{-1}=\lim_{r_2\to r_1}\frac{r_1^2 r_2 e^{r_1(x-t)}-r_1 r_2^2 e^{r_2(x-t)}}{r_2-r_1}=$$

$$=\lim_{r_2\to r_1}\frac{r_1^2 e^{r_1(x-t)}-2r_1 r_2 e^{r_2(x-t)}-r_2^2 r_1 e^{r_2(x-t)}(x-t)}{1}=-r_1^2 e^{r_1(x-t)}+$$

$$+r_1^3(x-t)\,e^{r_1(x-t)}=-r_1^2 e^{r_1(x-t)}(1+r_1(x-t)),$$

$$\lim_{r_2\to r_1}\frac{\partial^2\Delta_2(x-t)}{\partial x^2}D^{-1}=\lim_{r_2\to r_1}\frac{r_2^2 e^{r_2(x-t)}-r_1^2 e^{r_1(x-t)}}{r_2-r_1}=$$

$$=\lim_{r_2\to r_1}\frac{2r_2 e^{r_2(x-t)}+r_2^2 e^{r_2(x-t)}(x-t)}{1}=2r_1 e^{r_1(x-t)}+r_1^2(x-t)\,e^{r_1(x-t)}=$$

$$=r_1 e^{r_1(x-t)}(2+r_1(x-t))$$

$$\lambda\int_{c_j}^{b}K_{ij}(x,\eta)[D^{-1}(\sum_{s=1}^{n}y^{(s-1)}(x_0)\frac{d^i\Delta_s(u_j(\eta)-x_0)}{d\eta^i}]$$

Аналогично вычисляются пределы и при большем количестве параметров.

Профессором Н.К.Куликовым и рядом его учеников функции гибкой структуры применялись для решения и исследования дифференциальных и интегральных уравнений с обыкновенным аргументом. Применение функции гибкой структуры к различным уравнениям с отклоняющимся аргументом дает возможность преобразовать их к интегральным уравнениям, причем для ряда классов задач с неизвестными функциями от аргумента без отклонений.

Выясним, какие задачи для различных видов интегродифференциальных уравнений с помощью ФГС могут быть сведены к разрешающим интегральным уравнениям без отклонений аргумента и покажем, что эти разрешающие интегральные уравнения специального вида, как для начальных, так и для краевых задач уравнений Фредгольма (запаздывающего, нейтрального и опережающего типов), практически мало отличаются друг от друга, что может быть использовано для составления единой программы приближенного решения таких задач на ЭВМ.

§3. Применение ФГС к преобразованию задачи Коши

Пусть дано уравнение (1) и начальные условия

$$y^{(i)}(u_j(x)) = \varphi_i(u_j(x)),\ i = \overline{0,n-1},\ x\epsilon E_{x_0}, \qquad \textbf{(5)}$$

где $E_{x_0} = \bigcup_{j=0}^{l}E_{x_0}^{j}$, $E_{x_0}^{j}$ - множество точек, для которых соответствующие $u_j(x)\le x$ при $x\ge x_0$ $\forall j=\overline{1,l}$, а $E_{x_0}^{0}$ = $[a,x_0]$.

Предполагая, что решение задачи (1), (5) существует и единственно, будем искать её решение на отрезке $[x_0,b]$. Обозначим через c_j наименьшие из корней $u_j(x) = x_0$ на отрезке $[x_0,b]$, если же таковых нет, то полагаем соответствующие $c_j = b$. Далее разобьём интегралы в уравнении (1) на суммы от известных и неизвестных частей в выражениях от запаздываний в соответствии с начальными условиями (5), считая при этом $\varphi_n(x) = \varphi'_{n-1}(x)$,

$$\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}[f_{ij}(x)y^{(i)}(u_j(x)) + \lambda\int_{a}^{c_j}K_{ij}(x,\eta)\varphi_i(u_j(\eta))d\eta +$$

$$+\lambda\int_{c_j}^{b}K_{ij}(x,\eta)y^{(i)}(u_j(\eta))d\eta] = \mathrm{f(x)}. \qquad \mathbf{(1^*)}$$

Затем воспользуемся ФГС (2), подставив ее и производные (3)-(4) в последнее равенство (1*) и вводя при этом коэффициенты q_i в сумме по i перед $\mu(u_j(x))$, полагая $q_n=1$ и $q_i=0$ $\forall\ i=\overline{0,n-1}$,

$$\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}\{f_{ij}(x)[D^{-1}(\sum_{s=1}^{n}y^{s-1}(x_0)\frac{d^i\Delta_s(u_j(x)-x_0)}{dx^i}) +$$

$$+\int_{x_0}^{u_j(x)}\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i}\mu(t)dt) + q_i u_j'^n(x)\mu(u_j(x))] +$$

$$+\lambda\int_{c_j}^{b}K_{ij}(x,\eta)[D^{-1}(\sum_{s=1}^{n}y^{(s-1)}(x_0)\frac{d^i\Delta_s(u_j(\eta)-x_0)}{d\eta^i} +$$

$$+\int_{x_0}^{u_j(\eta)}\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(\eta)-t)}{d\eta^i}\ \mu(t)dt) + q_i u_j'^n(\eta)\mu(u_j(\eta))]d\eta +$$

$$+\lambda\int_{a}^{c_j}K_{ij}(x,\eta)\varphi_i(u_j(\eta))d\eta\,\} = \mathrm{f(x)}.$$

Полученные известные выражения перенесём в правую часть равенства

$$\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}\{f_{ij}(x)[D^{-1}\int_{x_0}^{u_j(x)}\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i}\mu(t)dt + q_i u_j'^n(x)\mu(u_j(x))] +$$

$$+\lambda\int_{c_j}^{b}K_{ij}(x,\eta)[D^{-1}\int_{x_0}^{u_j(\eta)}\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(\eta)-t)}{\partial\eta^i}\mu(t)dt) + \mathrm{q_i}u_j'^n(\eta)\mu(u_j(\eta))]d\eta =$$

$$= \mathrm{f(x)} - \sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}\{D^{-1}\sum_{s=1}^{n}y^{(s-1)}(x_0)[f_{ij}(x)\frac{d^i\Delta_s(u_j(x)-x_0)}{dx^i} +$$

$$+\lambda\int_{c_j}^{b} K_{ij}(x,\eta)\frac{d^i\Delta_s(u_j(\eta)-x_0)}{d\eta^i}d\eta] - \lambda\int_{a}^{c_j} K_{ij}(x,\eta)\varphi_i(\eta)d\eta\}.$$

Введя обозначения для известных выражений

$$\Phi_j(x,t) = D^{-1}\sum_{i=0}^{n} f_{ij}(x)\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i},$$

$$H_j^*(x,\eta,t) = D^{-1}\sum_{i=0}^{n} K_{ij}(x,\eta)\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(\eta)-t)}{\partial\eta^i},$$

$$F(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}\{D^{-1}\sum_{s=1}^{n} y^{(s-1)}(x_0)[f_{ij}(x)\frac{d^i\Delta_s(u_j(x)-x_0)}{dx^i} +$$

$$+\lambda\int_{c_j}^{b} K_{ij}(x,\eta)\frac{d^i\Delta_s(u_j(\eta)-x_0)}{d\eta^i}d\eta] - \lambda\int_{a}^{c_j} K_{ij}(x,\eta)\varphi_i(\eta)d\eta\},$$

придём к разрешающему интегральному уравнению специального вида смешанного типа Вольтерра – Фредгольма

$$\sum_{j=0}^{l}[f_{nj}(x)u_j'^n(x)\mu(u_j(x)) + \int_{x_0}^{u_j(x)}\Phi_j(x,t)\mu(t)dt) +$$

$$+\lambda\int_{C_j}^{b} d\eta\int_{x_0}^{u_j(\eta)} H_j^*(x,\eta,t)\mu(t)dt +$$

$$+\lambda\int_{c_j}^{b} K_{nj}(x,\eta)u_j'^n(\eta)\mu(u_j(\eta))d\eta] = F(x) \qquad \mathbf{(6^*)}$$

Разрешающее уравнение (6*) можно упростить, введя новые переменные $u_j(\eta)=t$ в последних интегралах суммы по j и изменив порядок интегрирования в двойных интегралах. Для этого введём для $u_j(\eta)$ обратную функцию $\eta(t)= u_j^{-1}(t)$ и найдём новые пределы интегрирования в двойных интегралах $t_1= u_j(c_j)=x_0$, $t_2= u_j(b)$ и $d\eta=d\,u_j^{-1}(t)$

$$\int_{c_j}^{b} K_{nj}(x,\eta)u_j'^n(\eta)\mu(u_j(\eta))d\eta = \int_{x_0}^{u_j(b)} K_{nj}(x,u_j^{-1}(t))\mu(t)u_j'^{n-1}(u_j^{-1}(t))dt,$$

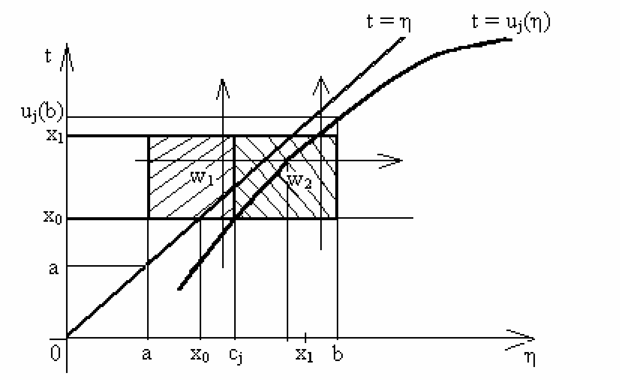
$$\int_{c_j}^{b} d\eta \int_{x_0}^{u_j(x)} H_j^*(x,\eta,t)\mu(t)dt = \int_{x_0}^{u_j(b)} \mu(t)dt \int_{u_j^{-1}(t)}^{b} H_j^*(x,\eta,t)d\eta =$$

$$= \int_{x_0}^{u_j(b)} H_j^{**}(x,t)\mu(t)dt\,,$$

где

$$H_j^{**}(x,t) = \int_{u_j^{-1}(t)}^{b} H_j^*(x,\eta,t)d\eta$$

и порядок интегрирования изменён в соответствии с ниже изображённой (заштрихованной) областью интегрирования:



$u_j(\eta) \le \eta$, $u_j(c_j) = x_0$, $x_0 \le c_j \le b$ $\forall j = \overline{0,l}$

Теперь в уравнении (6*) интегралы с одинаковыми пределами можно объединить под одним интегралом

$$\int_{c_j}^{b} d\eta \int_{x_0}^{u_j(\eta)} H_j^*(x,\eta,t)\mu(t)dt + \int_{c_j}^{b} K_{nj}(x,\eta)u_j'^{n}(\eta)\mu(u_j(\eta))d\eta =$$

$$= \int_{x_0}^{u_j(b)} H_j^{**}(x,t)\mu(t)dt + \int_{x_0}^{u_j(b)} K_{nj}(x,u_j^{-1}(t))\mu(t)u_j'^{n-1}\left(u_j^{-1}(t)\right)dt =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{u_j(b)} [H_j^{**}(x,t) + K_{nj}(x, u_j^{-1}(t)) u_j'^{n-1}\left(u_j^{-1}(t)\right)\mu(t)dt =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{u_j(b)} H_j(x,t)\mu(t)dt,$$

где $H_j(x,t) = H_j^{**}(x,t) + K_{nj}(x, u_j^{-1}(t)) u_j'^{n-1}\left(u_j^{-1}(t)\right)$.

Тогда разрешающее интегральное уравнение специального вида смешанного типа Вольтерра-Фредгольма в общем случае примет вид:

$$\sum_{j=0}^{l} [f_{nj}(x) u_j'^n(x) \mu(u_j(x)) + \int\limits_{x_0}^{u_j(x)} \Phi_j(x,t)\mu(t)dt) +$$

$$+\lambda \int\limits_{x_0}^{u_j(b)} H_j(x,t)\mu(t)dt] = F(x), \qquad \textbf{(6)}$$

где $\Phi_j(x,t)$ и $F(x)$ определяются по формулам в (6*),

$$H_j(x,t) = H_j^{**}(x,t) + K_{nj}(x, u_j^{-1}(t)) u_j'^{n-1}\left(u_j^{-1}(t)\right) = \int\limits_{u_j^{-1}(t)}^{b} H_j^*(x,\eta,t)d\eta +$$

$$+K_{nj}(x, u_j^{-1}(t))\ u_j'^{n-1}\left(u_j^{-1}(t)\right) = \int\limits_{u_j^{-1}(t)}^{b} \sum_{i=0}^{n} K_{ij}(x,\eta) \frac{\partial^i \Delta_n(u_j(\eta) - t)}{[u_j(\eta)]^i} d\eta +$$

$$+K_{nj}(x, u_j^{-1}(t)) u_j'^{n-1}\left(u_j^{-1}(t)\right).$$

Далее исследуем вопрос о возможности преобразования начальной задачи для интегродифференциального уравнения Фредгольма с запаздывающим аргументом к интегральным уравнениям с обыкновенным аргументом в зависимости от типа рассматриваемого уравнения.

а) Уравнения запаздывающего типа получим из общего уравнения (1), если положить $f_{no}(x) \equiv 1$, $f_{nj}(x) \equiv 0$ и $K_{nj}(x,\eta) \equiv 0$ $\forall\ j = \overline{1,l}$, тогда уравнение (1) примет вид

$$y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{l} \sum_{i=0}^{n-1} [f_{ij}(x) y^{(i)}(u_j(x)) + \lambda \int\limits_a^b K_{ij}(x,\eta) y^{(i)}(\eta) d\eta] = f(x) \qquad \textbf{(1a)}$$

и разрешающее уравнение начальной задачи будет

$$\mu(x)+\sum_{j=0}^{l}[\int_{x_0}^{u_j(x)}\Phi_j(x,t)\mu(t)dt + \lambda\int_{x_0}^{u_j(b)}H_j(x,t)\mu(t)dt]=F(x), \qquad \textbf{(6а)}$$

где $\Phi_j(x,t)$ и $H_j(x,t)$ определяются по формулам

$$\Phi_j(x,t) = D^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} f_{ij}(x)\frac{\partial^i \Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i},$$

$$H_j(x,t) = D^{-1}\int_{u_j^{-1}(t)}^{b}\sum_{i=0}^{n}K_{ij}(x,\eta)\frac{\partial^i \Delta_n(u_j(\eta)-t)}{\partial \eta^i}d\eta + K_{n0}(x,t),$$

а F(x) по формуле в (6*).

Вывод. Начальная задача с условиями (5) для всех интегродифференциальных уравнений Фредгольма с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа (1а) с помощью ФГС (2) преобразуется к разрешающему интегральному уравнению специального вида смешанного типа Вольтерра-Фредгольма (6а) с обыкновенным аргументом.

б) Уравнение (1) будет уравнением нейтрального типа, если в нём $f_{n0}(x)\equiv 1$ и $\exists\, j\geq 1$, что $f_{nj}(x)\not\equiv 0$ или $K_{nj}(x,\eta)\not\equiv 0$, или существуют тождественно не равные нулю одновременно функции $f_{nj}(x)$ и ядра $K_{nj}(x)$.

Разрешающее уравнение (6) в этом общем случае будет с отклоняющимся аргументом. Если же дополнительно потребовать, чтобы $f_{nj}(x)\equiv 0$ $\forall j=\overline{1,l}$, то получим для такого вида уравнений нейтрального типа разрешающее уравнение начальной задачи, аналогичное уравнению (6а)

$$\mu(x)+\sum_{j=0}^{l}\Big[\int_{x_0}^{u_j(x)}\Phi_j(x,t)\mu(t)dt + \lambda\int_{x_0}^{u_j(b)}H_j(x,t)\mu(t)dt\Big]=F(x), \qquad \textbf{(6б),}$$

где $$\Phi_j(x,t) = D^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} f_{ij}(x)\frac{\partial^i \Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i},$$

$$H_j(x,t) = D^{-1}\int_{u_j^{-1}(t)}^{b}\sum_{i=0}^{n}K_{ij}(x,\eta)\frac{\partial^i \Delta_n(u_j(\eta)-t)}{\partial \eta^i}d\eta +$$
$$+ K_{nj}(x,u_j^{-1}(t))u_j'^{\,n-1}(u_j^{-1}(t)).$$

Вывод. Начальная задача с условиями (5) для интегродифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом нейтрального типа (1) с помощью ФГС (2) преобразуется в общем случае к разрешающему интегральному уравнению также с запаздывающим аргументом. Но если дополнительно потребовать, чтобы $f_{nj}(x)\equiv 0 \quad \forall j=\overline{1,l}$ и $K_{nj}(x,\eta)\not\equiv 0$, то для такого вида уравнений разрешающее интегральное уравнение специального вида смешанного типа Вольтерра-Фредгольма (6б) будет с обыкновенным аргументом.

в) Уравнение (1) будет уравнением опережающего типа, если $\exists j\neq 0$, что $f_{nj}(x)\not\equiv 0$, а $f_{no}(x)\equiv 0$ и $K_{no}(x,\eta)\equiv 0$. Положим $f_{nl}(x)\equiv 1$ и дополнительно потребуем, чтобы $f_{nj}(x)\equiv 0 \quad \forall j=\overline{1,l-1}$. В этом случае уравнение (1) примет вид:

$$y^{(n)}(u_l(x))+\sum_{i=0}^{n-1}[\sum_{j=0}^{l-1} f_{ij}(x)y^{(i)}(u_j(x))+$$

$$+\lambda\int_a^b\sum_{j=0}^{l} K_{ij}(x,\eta)y^{(i)}(u_j(\eta))d\eta] = f(x) \qquad \textbf{(1в)}$$

и соответствующее ему разрешающее уравнение начальной задачи будет

$$u_l'^n(x)\,\mu(u_l(x))+\sum_{j=0}^{l-1}[\int_{x_0}^{u_j(x)}\Phi_j(x,t)\mu(t)dt+$$

$$+\lambda\sum_{j=0}^{l}\int_{x_0}^{u_j(b)}H_j(x,t)\mu(t)dt = F(x), \qquad \textbf{(1в)}$$

$$\text{где } \Phi_j(x,t) = D^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} f_{ij}(x)\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i},$$

$$H_j(x,t) = D^{-1}\int_{u_j^{-1}(t)}^{b}\sum_{i=0}^{n}K_{ij}(x,\eta)\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(\eta)-t)}{\partial\eta^i}d\eta+$$

$$+ K_{nj}(x,\, u_j^{-1}(t))\, u_j'^{n-1}\left(u_j^{-1}(t)\right)$$

и F(x) находится в соответствии с (6*).

Далее, произведя замену $u_l(x) = z$, $x = u_l^{-1}(z)$, получим интегральное уравнение с обыкновенным аргументом

$$u_l'^{n}\left(u_l^{-1}(z)\right)\mu(z)+\sum_{j=0}^{l-1}\int_{x_0}^{u_j(u_l^{-1}(z))}\Phi_j(u_l^{-1}(z),t)\mu(t)dt+$$

$$+\lambda\sum_{j=0}^{l}\int_{x_0}^{u_j(b)}H_j(u_l^{-1}(z),t)\mu(t)dt = F(u_l^{-1}(z)).$$

Для известных выражений в последнем уравнении введём новые обозначения

$$Q_j(z,t) = \frac{\Phi_j\left(u_j^{-1}(z),t\right)}{u_l'^{n}\left(u_l^{-1}(z)\right)} = D^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f_{ij}(u_l^{-1}(z))}{u_l'^{n}\left(u_l^{-1}(z)\right)}\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(u_l^{-1}(z))-t)}{(\partial u_l^{-1}(z))^i},$$

$$N_j(z,t) = \frac{H_j\left(u_l^{-1}(z),t\right)}{u_l'^{n}\left(u_l^{-1}(z)\right)} =$$

$$=[u_l'^{n}(u_l^{-1}(z))]^{-1}[D^{-1}\int_{u_j^{-1}(t)}^{b}\sum_{i=0}^{n}K_{ij}(u_l^{-1}(z),\eta)\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(\eta)-t)}{\partial\eta^i}+$$

$$+K_{nj}(\,u_l^{-1}(z)\,,\,u_j^{-1}(t)\,)\,u_j'^{n-1}\left(u_j^{-1}(t)\right)],$$

$$B(z) = \frac{F(u_l^{-1}(z))}{u_l'^{n}(u_l^{-1}(z))} = [u_l'^{n}(u_l^{-1}(z))]^{-1}\{f_{ij}(u_l'^{-1}(z))-$$

$$-\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}\{D^{-1}\sum_{s=1}^{n}y^{(s-1)}(x_0)[f_{ij}(u_l^{-1}(z))\frac{d^i\Delta_s(u_j(u_l^{-1}(z))-x_0)}{d(u_j^{-1}(z))]^i}+$$

$$+\lambda\int_{c_j}^{b}K_{ij}(u_l^{-1}(z),\eta)\frac{d^i\Delta_s(u_j(\eta)-x_0)}{d\eta^i}d\eta]-\ \lambda\int_{a}^{c_j}K_{ij}(x,\eta)\varphi_i(\eta)d\eta\},$$

$$v_j(z) = u_j(u_l^{-1}(z)),$$

тогда разрешающее уравнение перепишется

$$\mu(z)+\sum_{j=0}^{l-1}\int_{x_0}^{V_j(z)}Q_j(z,t)\mu(t)dt+\lambda\sum_{j=0}^{l}\int_{x_0}^{u_j(b)}N_j(z,t)\mu(t)dt = B(z). \quad \textbf{(6в)}$$

Вывод. Начальная задача с условиями (5) для интегродифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом опережающего типа (1в) с помощью ФГС (2) преобразуется к разрешающему интегральному уравнению специального вида смешанного типа Вольтерра-Фредгольма в общем случае также с запаздывающим аргументом, но если внешний дифференциальный оператор содержит старшую производную только с одним отклонением, то разрешающее уравнение (6в) будет с обыкновенным аргументом.

§4. Применение ФГС к преобразованию краевой задачи

Рассмотрим линейное интегродифференциальное уравнение (1) с линейными билокальными краевыми условиями

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{i\tau} y^{(i)}(x_0) + \beta_{i\tau} y^{(i)}(x_1)] = \gamma_\tau,\ \tau=\overline{0,n-1},\ a\le x_0<x_1\le b, \qquad \textbf{(7)}$$

с начальными функциями

$$y^{(i)}(u_j(x)) = y^{(i)}(x_0)\varphi_i(u_j(x)) \text{ при } x\in E_{x_0},\ i=\overline{0,n-1}, \qquad \textbf{(8)}$$

где $E_{x_0} = \bigcup_{j=0}^{l} E_{x_0}^j$, $E_{x_0}^j$ - множество значений $u_j(x) \le x_0$ при $x>x_0$ и $E_{x_0}^0 =$ $=[a,x_0]$, функции $\varphi_i(x)$-заданы и $\varphi_i(x_0)=1$ $\forall\ i=\overline{0,n-1}$, $\varphi_n(x)=\varphi_{n-1}'(x)$.

По-прежнему, как и в §3., считаем $u_0(x)\equiv x$ и c_j-наименьшие корни уравнений $u_j(x)=x_0$, если же таковых нет, то полагаем $c_j=b$ $\forall$ $j=\overline{0,l}$.

Предполагая, что решение краевой задачи (1), (7)-(8) существует и единственно, для её решения применим одну из модификаций ФГС (2) и её производные (3)-(4). Сначала, воспользовавшись начальными функциями (8), разобьём интегралы в уравнении (1) на суммы

$$\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}[f_{ij}(x)y^{(i)}(u_j(x)) + \lambda\int_a^{c_j} K_{ij}(x,\eta)y^{(i)}(x_0)\varphi_i(u_j(\eta))d\eta +$$

$$+\lambda\int_{c_j}^{b} K_{ij}(x,\eta)y^{(i)}(u_j(\eta))d\eta]=f(x). \qquad \textbf{(1**)}$$

Затем, используя краевые условия (7), начальные функции (8), ФГС (2) и её производные (3)-(4), определим $y^{(i)}(x_0)$ через новую неизвестную функцию $\mu(x)$, при этом могут возникнуть три возможных ситуации:

1. $x_0<x_1\le c_j$ $\forall$ $j=\overline{0,l}$; 2. $x_0\le c_j<x_1$ $\forall j=\overline{0,l}$;. 3. x_1 таково, что $\exists j=\overline{0,l}$, для которых $x_0<x_1\le c_j$ и для которых $x_0\le c_j<x_1$.

Рассмотрим подробно возможные варианты.

1. Первый случай наиболее простой, так как подставив $x=x_1$ в начальные функции (8) при $j=0$ и затем значения $y^{(i)}(x_1) = y^{(i)}(x_0)\varphi_i(x_1)$ в краевые условия (7), получим алгебраическую систему

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} y^{(i)}(x_0)[\alpha_{i\tau} + \beta_{i\tau}\varphi_i(x_1)] = \gamma_\tau , \\ \tau = \overline{0, n-1} \end{cases} \tag{9}$$

для определения значений $y^{(i)}(x_0)$.

Обозначив через ω главный определитель этой системы

$$\omega = \det[\alpha_{i\tau}+\beta_{i\tau}\varphi_i(x_1)], \quad i,\tau=\overline{0,n-1}$$

и через $\omega_{i\tau}$ – алгебраические дополнения к элементам главного определителя по формулам Крамера, найдём

$$y^{(i)}(x_0) = \omega^{-1}\sum_{\tau=0}^{n-1}\gamma_\tau\omega_{i\tau}, \; i = \overline{0,n-1}. \tag{10}$$

И краевая задача в этом случае свелась к решению начальной задачи, рассмотренной в §3., только при её решении в формулах для уравнений (6а), (6б) и (6в) вместо начальных функций $\varphi_i(u_j(x))$ следует подставить начальные функции $\varphi_i^*(u_j(x))$ в соответствии с условиями (8) и результатом (10), т.е.

$$\varphi_i^*(u_j(x)) = \varphi_i(u_j(x))\, \omega^{-1}\sum_{\tau=0}^{n-1}\gamma_\tau\omega_{i\tau} . \tag{11}$$

2. Во втором и третьем случаях, применив ФГС (2) и её производные (3)-(4), выразим значения $y^{(i)}(x_1)$, $i=\overline{0,n-1}$ через новую неизвестную функцию $\mu(x)$ и начальные значения искомой функции $y^{(i)}(x_0)$

$$y^{(i)}(x_1) = D^{-1}\Big[\sum_{s=1}^{n} y^{(s-1)}(x_0)\Delta_s^{(i)}(x_1-x_0) + ,$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^i\Delta_n(x_1-t)}{\partial x^i}\mu(t)dt\Big], \; i=\overline{0,n-1},$$

подставив полученные выражения $y^{(i)}(x_1)$ в краевые условия (7)

$$\sum_{i=0}^{n-1}\{\alpha_{i\tau}y^{(i)}(x_0) + \beta_{i\tau}D^{-1}\Big[\sum_{s=1}^{n} y^{(s-1)}(x_0)\Delta_s^{(i)}(x_1-x_0) +$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^i\Delta_n(x_1-t)}{\partial x^i}\mu(t)dt]\}=\gamma_\tau,\ \tau=\overline{0,n-1},$$

и, перегруппировав слагаемые, придём к системе алгебраических уравнений относительно $y^{(i)}(x_0)$

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{i\tau}+\beta_{i\tau}D^{-1}\Delta_{i+1}^{(i)}(x_1-x_0)]y^{(i)}(x_0)=$$

$$=\gamma_\tau-D^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\beta_{i\tau}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^i\Delta_n(x_1-t)}{\partial x^i}\mu(t)dt\ ,\tau=\overline{0,n-1}. \qquad \textbf{(12)}$$

Обозначив главный определитель системы (12) через ω

$$\omega=\det[\alpha_{i\tau}+\beta_{i\tau}D^{-1}\Delta_{i+1}^{(i)}(x_1-x_0)],\ i,\tau=\overline{0,n-1}, \qquad \textbf{(13)}$$

а алгебраические дополнения к элементам главного определителя через $\omega_{i\tau}$ по формулам Крамера, найдём

$$y^{(i)}(x_0)=\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{i\tau}}{\omega}[\gamma_\tau-D^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x^k}\mu(t)dt],i=\overline{0,n-1}. \qquad \textbf{(14)}$$

В соответствии с (14) начальные функции краевой задачи (8) примут вид:

$$y^{(i)}(u_j(x))=\varphi_i(u_j(x))\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{i\tau}}{\omega}[\gamma_\tau-D^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x^k}\mu(t)dt],$$

$$i=\overline{0,n-1},\ j=\overline{0,l},\ x\in E_{x_0}, \qquad \textbf{(15)}$$

а функции гибкой структуры

$$y^{(i)}(x)=D^{-1}\{\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^i\Delta_s(x-x_0)}{[\partial x]^i}\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{s\tau}}{\omega}[\gamma_\tau-$$

$$-D^{-1}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1{}^k}\mu(t)dt]+$$

$$+\int_{x_0}^{u_j(x)}\frac{\partial^i\Delta_n(x-t)}{[\partial x]^i}\mu(t)dt\}+q_i\mu(x), \qquad \textbf{(16)}$$

где $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,l}$, $q_n=1$, $q_i=0$ $\forall i=\overline{0,n-1}$, $x\in[c_j,b]$.

Подставим выражения (15) и (16) в уравнение (1**), перенесём все известные выражения, получившиеся при этом, в правую часть равенства и пронумеруем выражения, содержащие неизвестную функцию под знаком интеграла

$$\sum_{j=0}^{l}\{f_{nj}(x)u_j'^n(x)\mu(u_j(x))+$$

$$+\lambda\int_{c_j}^{b}K_{nj}(x,\eta)u_j'^n(\eta)\mu(u_j(\eta))d\eta+\sum_{i=0}^{n}[-f_{ij}(x)\cdot$$

{1}

$$\cdot D^{-2}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^i\Delta_s(u_j(x)-x_0)}{[\partial u_j(x)]^i}\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{(s-1)\tau}}{\omega}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}\mu(t)dt+$$

{2}

$$+f_{ij}(x)D^{-1}\int_{x_0}^{u_j(x)}\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i}\mu(t)dt+\lambda\int_{c_j}^{b}K_{ij}(x,\eta)D^{-1}\cdot$$

{3}

$$\cdot\int_{x_0}^{u_j(\eta)}\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(\eta)-t)}{\partial\eta^i}\mu(t)dt-\lambda\int_{a}^{c_j}K_{ij}(x,\eta)\varphi_i(u_j(\eta))\cdot$$

{4}

$$\cdot\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{i\tau}}{\omega}D^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}\mu(t)dtd\eta-$$

{5}

$$-\lambda\int_{c_j}^{b}K_{ij}(x,\eta)D^{-1}\cdot\sum_{s=1}^{n}\frac{d^i\Delta_s(u_j(\eta)-x_0)}{d\eta^i}\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{(s-1)\tau}}{\omega}D^{-1}\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}\mu(t)dtd\eta]\}=$$

{6}

$$= \mathrm{f(x)} - \sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}[f_{ij}(x)D^{-1}\sum_{s=1}^{n}\frac{d^i\Delta_s(u_j(x)-x_0)}{dx^i}\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{(s-1)\tau}}{\omega}\gamma_\tau +$$

$$+\lambda\int_a^{c_j}K_{ij}(x,\eta)\varphi_i(u_j(\eta))\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{i\tau}}{\omega}\gamma_\tau +$$

$$+\lambda\int_{c_j}^{b}K_{ij}(x,\eta)D^{-1}\sum_{s=1}^{n}\frac{d^i\Delta_s(u_j(\eta)-x_0)}{d\eta^i}\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{(s-1)\tau}}{\omega}\gamma_\tau] = B(x).$$

Интегралы {1}, {3} и {4} уже преобразовывались в §3. (формулы для уравнения (6))

{1}.

$$\lambda\int_{c_j}^{b}K_{nj}(x,\eta)\mu(u_j(\eta))d\eta = \int_{x_0}^{u_j(b)}K_{nj}(x,u_j^{-1}(t))\mu(t)u_j'^{\,n-1}\left(u_j^{-1}(t)\right)dt,$$

{3}. $$D^{-1}\sum_{i=0}^{n}f_{ij}(x)\cdot\int_{x_0}^{u_j(x)}\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i}\mu(t)dt = \int_{x_0}^{u_j(x)}\Phi_j(x,t)\mu(t)dt,$$

{4}. $$D^{-1}\sum_{i=0}^{n}\int_{c_j}^{b}K_{ij}(x,\eta)\int_{x_0}^{u_j(b)}\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(\eta)-t)}{\partial\eta^i}\mu(t)dtd\eta =$$

$$= \int_{x_0}^{u_j(b)}H_j^{**}(x,t)\mu(t)dt\,.$$

В интегралах {2} введем обозначения для известных выражений

$$G_j^*(x,t) = -\lambda^{-1}D^{-2}\sum_{i=0}^{n}f_{ij}(x)\cdot\sum_{s=1}^{n}\frac{d^i\Delta_s(u_j(x)-x_0)}{dx^i}\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{(s-1)\tau}}{\omega}\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}\mu(t)dt,$$

тогда интегральные выражения {2} перепишутся

{2}. $$-D^{-2}\sum_{i=0}^{n}f_{ij}(x)\sum_{s=1}^{n}\frac{d^i\Delta_s(u_j(x)-x_0)}{dx^i}\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{(s-1)\tau}}{\omega}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\cdot$$

$$\cdot\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}\mu(t)dt=\int_{x_0}^{x_1}G_j^*(x,t)\mu(t)dt.$$

В интегралах {5} и {6} изменим сначала порядок интегрирования, а затем введём обозначения для известных выражений

$$G_j^{**}(x,t)=-D^{-1}\int_a^{c_j}\sum_{i=0}^{n}K_{ij}(x,\eta)\varphi_i(u_j(\eta))\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{i\tau}}{\omega}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}d\eta;$$

$$G_j^{***}(x,t)=-D^{-1}\int_{c_j}^{b}\sum_{i=0}^{n}K_{ij}(x,\eta)\sum_{s=1}^{n}\frac{d^i\Delta_s(u_j(\eta)-x_0)}{d\eta^i}\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{(s-1)\tau}}{\omega}\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\cdot\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}d\eta,$$

тогда интегральные выражения {5} и {6} примут вид:

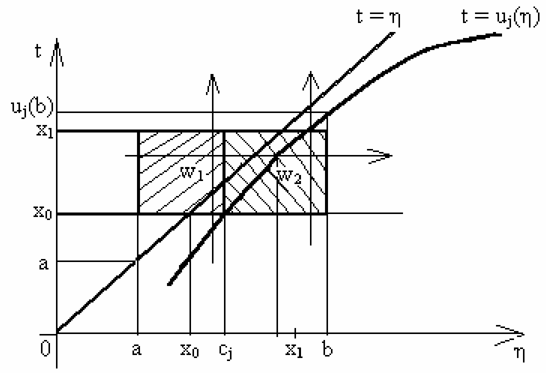
{5}. $$\lambda D^{-1}\int_a^{c_j}\sum_{i=0}^{n}K_{ij}(x,\eta)\varphi_i(u_j(\eta))\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{i\tau}}{\omega}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\cdot$$

$$\cdot\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}\mu(t)dt=\lambda\int_{x_0}^{x_1}G_j^*(x,t)\mu(t)dt,$$

{6}. $$-\lambda D^{-1}\int_{c_j}^{b}\sum_{i=0}^{n}K_{ij}(x,\eta)\sum_{s=1}^{n}\frac{d^i\Delta_s(u_j(\eta)-x_0)}{d\eta^i}\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{(s-1)\tau}}{\omega}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\cdot$$

$$\cdot\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}\mu(t)dt=\lambda\int_{x_0}^{x_1}G_j^{**}(x,t)\mu(t)dt.$$

Порядок интегрирования изменён в соответствии с ниже изображёнными (заштрихованными) областями интегрирования w_1 и



w_2

Суммируем интегралы с одинаковыми пределами. Интегралы {1} и {4} уже суммировались в §3.(формулы в разрешающем интегральном уравнении (6)), где

$$H_j(x,t) = H^{**}(x,t)+K_{nj}(x, u_j^{-1}(t)).$$

Суммируем теперь интегралы {2},{5} и {6}

$$\lambda\int_{x_0}^{x_1} G_j^{*}(x,t)\mu(t)dt + \lambda\int_{x_0}^{x_1} G_j^{**}(x,t)\mu(t)dt + \lambda\int_{x_0}^{x_1} G_j^{***}(x,t)\mu(t)dt =$$

$$= \lambda\int_{x_0}^{x_1} G_j(x,t)\mu(t)dt, \text{ где } G_j(x,t) = G_j^{*}(x,t)+G_j^{**}(x,t)+G_j^{***}(x,t).$$

Учитывая проделанные преобразования и обозначения, получим общий вид разрешающего интегрального уравнения краевой задачи:

$$\sum_{j=0}^{l}[f_{nj}(x)u_j'^{n}(x)\mu(u_j(x)) + \int_{x_0}^{u_j(x)} \Phi_j(x,t)\mu(t)dt + \lambda\int_{x_0}^{u_j(b)} H_j(x,t)\mu(t)dt +$$

$$+\lambda\int_{x_0}^{x_1} G_j(x,t)\mu(t)dt] = B(x). \qquad \textbf{(17)}$$

Как и в §3., исследуем вопрос о возможности преобразования краевой задачи для интегродифференциального уравнения Фредгольма с запаздывающим аргументом к интегральным уравнениям с обыкновенным аргументом в зависимости от типа рассматриваемого уравнения.

а) Краевая задача (1а), (7)-(8) для уравнений запаздывающего типа, в силу условий $f_{nj}(x)\equiv 0$ и $K_{nj}(x,\eta)\equiv 0$ $\forall$ $j=\overline{1,l}$, преобразуется к разрешающему интегральному уравнению **(17а)**

$$\mu(x)+\sum_{j=0}^{l}[\int_{x_0}^{u_j(x)}\hat{O}_j(x,t)\mu(t)dt+\lambda\int_{x_0}^{u_j(b)}H_j(x,t)\mu(t)dt+\lambda\int_{x_0}^{x_1}G_j(x,t)\mu(t)dt]=B(x).$$

Вывод. Краевая задача для всех интегродифференциальных уравнений Фредгольма с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа с помощью ФГС преобразуется к разрешающему интегральному уравнению специального вида смешанного типа Вольтера-Фредгольма с обыкновенным аргументом.

б) Краевая задача (1), (7)-(8) для уравнений нейтрального типа при $f_{n0}(x)\equiv 1$, $f_{nj}(x)\equiv 0$ $\forall j=\overline{1,l}$ и $K_{nl}(x,\eta)\not\equiv 0$ преобразуется к разрешающему интегральному уравнению

$$\mu(x)+\sum_{j=0}^{l}[\int_{x_0}^{u_j(x)}\Phi_j(x,t)\mu(t)dt+\lambda\int_{x_0}^{u_j(b)}H_j(x,t)\mu(t)dt+$$
$$+\lambda\int_{x_0}^{x_1}G_j(x,t)\mu(t)dt]=B(x). \qquad \textbf{(17б)}$$

Вывод. Краевая задача с условиями (7)-(8) для интегродифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом нейтрального типа с помощью ФГС (2) преобразуется в общем случае к разрешающему интегральному уравнению также с запаздывающим аргументом. Если же дополнительно потребовать, чтобы $f_{nj}(x)\equiv 0$ $\forall j=\overline{1,l}$ и $K_{nj}(x,\eta)\not\equiv 0$, то для такого вида уравнений разрешающее интегральное уравнение специального вида смешанного типа Вольтерра-Фредгольма (17б) будет с обыкновенным аргументом.

в) Рассмотрим теперь краевую задачу для уравнений опережающего типа, положив $f_{nl}(x)\equiv 1$, $f_{nj}(x)\equiv 0$ $\forall$ $j=\overline{1,l-1}$ и $K_{n0}(x,\eta)\equiv 0$, тогда задача (1в), (7)-(8) преобразуется к разрешающему интегральному уравнению:

$$\mu(z)+\sum_{j=0}^{l-1}\int_{x_0}^{V_j(z)} Q_j(z,t)\mu(t)dt+\lambda\sum_{j=0}^{l}[\int_{x_0}^{u_j(b)} N_j(z,t)\mu(t)dt+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1} M_j(z,t)\mu(t)dt]=R(z), \qquad \textbf{(17в)}$$

где $Q_j(z,t)$, $N_j(z,t)$ и $v_j(z)$ находятся по формулам в разрешающем интегральном уравнении (6в), а

$$M_j(z,t) = G_j(u_l^{-1}(z),t) \text{ и } R(z) = B(u_l^{-1}(z)).$$

Вывод. Краевая задача с условиями (7)-(8) для интегродифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом опережающего типа (1) с помощью ФГС (2) преобразуется к разрешающему интегральному уравнению специального вида смешанного типа Вольтерра-Фредгольма в общем случае также с запаздывающим аргументом, но если внешний дифференциальный оператор содержит старшую производную только с одним отклонением, т.е. имеем уравнение (1в), то разрешающее интегральное уравнение специального вида смешанного типа Вольтерра-Фредгольма (17в) будет с обыкновенным аргументом.

Глава VI
РЕШЕНИЕ РАЗРЕШАЮЩИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-ФРЕДГОЛЬМА

§1. Преобразование разрешающих уравнений к единому виду

Нетрудно увидеть, что начальные и краевые задачи для всех типов интегродифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом сводятся к разрешающим интегральным уравнениям Вольтерра-Фредгольма фактически одного и того же вида. Действительно, вводя кусочно заданные ядра

$$T_j(x,t)=\begin{cases} H_j(x,t)+G_j(x,t), если\ x_0\le t\le x_1,\\ H_j(x,t), если\ x_1<t\le u_j(в),\end{cases}$$

уравнения (17а) и (17б) перепишем в упрощенной форме:

$$\mu(x)+\sum_{j=0}^{l}[\int_{x_0}^{u_j(x)}\Phi_j(x,t)\mu(t)dt+\lambda\int_{x_0}^{u_j(в)}T_j(x,t)\mu(t)dt]=B(x). \qquad \textbf{(18)}$$

Аналогично и для уравнения (17в), положив

$$T_j(z,t)=\begin{cases} N_j(z,t)+M_j(z,t), если\ x_0\le t\le x_1,\\ N_j(z,t), если\ x_1<t\le u_j(в),\end{cases}$$

и $Q_l(z,t)\equiv 0$, уравнение (17в) примет вид

$$\mu(z)+\sum_{j=0}^{l}[\int_{x_0}^{V_j(z)} Q_j(z,t)\mu(t)dt+\lambda\int_{x_0}^{u_j(в)} T_j(z,t)\mu(t)dt]=R(z). \quad \textbf{(19)}$$

Итак, все разрешающие уравнения (6а), (6б), (6в) для начальных задач и (17а), (17б), (17в) для краевых задач преобразуются к одному и тому же виду (18) или (19) .

Разрешающее уравнение (19)- наиболее общий вид разрешающих уравнений, так как, положив $z\equiv x$,

$$V_j(z)\equiv u_j(x), Q_j(z,t)\equiv \Phi_j(x,t), T_j(z,t)\equiv T_j(x,t) \text{ и } R(z)\equiv B(x),$$

из уравнений вида (19) получим уравнение вида (18).

Поскольку все рассмотренные задачи сводятся к одному виду смешанных интегральных уравнений типа Вольтерра-Фредгольма (19), их можно использовать для составления единой программы решения на ЭВМ.

§2. Таблицы-схемы обозначений, введённых при решении начальных и краевых задач

Для удобства использования полученных формул при исследовании и решении различных задач сведём результаты в таблицы-схемы, которые будут использованы в дальнейшем для исследования вариантов решения в замкнутом виде полученных разрешающих интегральных уравнений, их приближённого решения и при составлении программ решения на ЭВМ.

Таблица 1. Начальная задача для интегродифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом.

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}\left[f_{ij}(x)y^{(i)}(u_j(x))+\lambda\int_a^b K_{ij}(x,\eta)y^{(i)}(u_j(\eta))d\eta \right]=f(x) \ (1) \\ y^{(i)}(u_j(x))=\phi_i(u_j(x)),\ i=\overline{0,n-1},\ x\in E_{x_0} \ (2) \end{cases}$$

	Запаздывающий тип	Нейтральный тип	Опережающий тип
Условия в уравнении (1)	$f_{n0}(x)\equiv 1$, $f_{nj}(x)\equiv 0$ и $K_{nj}(x,\eta)\equiv 0$ $\forall j=\overline{1,l}$.	$f_{n0}(x)\equiv 1$, $f_{nj}(x)\equiv 0$ $\forall j=\overline{1,l}$ и $\exists j\geq 1$, что $K_{nj}(x,\eta)\not\equiv 0$	$f_{n0}(x)\equiv 0$, $K_{n0}(x,\eta)\equiv 0$ и $\exists !\, j\neq 0$: $f_{nj}(x)\not\equiv 0$
Разрешающее уравнение (19)	$\mu(z)+\sum_{j=0}^{l}\left[\int_{x_0}^{v_j(z)} Q_j(z,t)\mu(t)dt+\lambda\int_{x_0}^{u_j(b)} N_j(z,t)\mu(t)dt\right]=B(z)$ (19)		
	Формулы в (6а)	Формулы в (6б)	Формулы в (6в)
Обозначения в разрешающем уравнении (19)	$z\equiv x, V_j(z)\equiv u_j(x)$, $Q_j(z,t)\equiv\Phi_j(x,t)=D^{-1}\cdot \sum_{i=0}^{n-1} f_{ij}(x)\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i}$ $N_j(z,t)\equiv H_j(x,t)=D^{-1}\cdot \int_{u_j^{-1}(t)}^{b}\sum_{i=0}^{n-1}[K_{ij}(x,\eta)\cdot \frac{\partial^i\Delta_n(u_j(\eta)-t)}{\partial\eta^i}]d\eta + K_{n0}(x,t)$, $B(z)\equiv F(x)=f(x)- \sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}\{D^{-1}\sum_{s=1}^{n}y^{(s-1)}(x_0)\cdot [f_{ij}(x)\frac{d^i\Delta_s(u_j(x)-x_0)}{dx^i}+ \lambda\int_{C_j}^{b}K_{ij}(x,\eta)\frac{d^i\Delta_s(u_j(\eta)-x_0)}{d\eta^i}d\eta]- \lambda\int_{a}^{C_j}K_{ij}(x,\eta)\varphi_i(\eta)d\eta\}$.	$z\equiv x, V_j(z)\equiv u_j(x)$, $Q_j(z,t)\equiv\Phi_j(x,t)=D^{-1}\cdot \sum_{i=0}^{n-1} f_{ij}(x)\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i}$ $N_j(z,t)\equiv H_j(x,t)=D^{-1}\cdot \int_{u_j^{-1}(t)}^{b}\sum_{i=0}^{n-1}K_{ij}(x,\eta)\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(\eta)-t)}{\partial\eta^i}d\eta+ K_{nj}(x,u^{-1}(t))\cdot u_j'^{\,n-1}(u_j^{-1}(z))\,dt$, $B(z)\equiv F(x)=f(x)- \sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}\{D^{-1}\sum_{s=1}^{n}y^{(s-1)}(x_0)\cdot [f_{ij}(x)\cdot\frac{d^i\Delta_s(u_j(x)-x_0)}{dx^i}+ \lambda\int_{C_j}^{b}K_{ij}(x,\eta)\frac{d^i\Delta_s(u_j(\eta)-x_0)}{d\eta^i}d\eta]- \lambda\int_{a}^{C_j}K_{ij}(x,\eta)\varphi_i(\eta)d\eta\}$.	$V_j(z)\equiv u_j(u_l^{-1}(z))$, $z\equiv u_l(x),\ x=u_l^{-1}(z)$, $Q_j(z,t)=\frac{\Phi_j(u_l^{-1}(z),t)}{u_l'^{\,n}(u_l^{-1}(z))}$ $\forall j=\overline{0,l-1},\ Q_l(z,t)\equiv 0$, $N_j(z,t)\equiv\frac{H_j(u_l^{-1}(z),t)}{u_l'^{\,n}(u_l^{-1}(t))}$, $B(z)=\frac{F(u_l^{-1}(z))}{u_l'^{\,n}(u_l^{-1}(z))}= =[u_l'^{\,n}(u_l^{-1}(z))]^{-1}\{f_{ij}(u_l^{-1}(z))- -\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}\{D^{-1}\sum_{s=1}^{n}y^{(s-1)}(x_0)\cdot [f_{ij}(u_l^{-1}(z))\frac{d^i\Delta_s(u_j(u_l^{-1}(z))-x_0)}{(du_l^{-1}(z))^i}+ +\lambda\int_{C_j}^{b}K_{ij}(u_l^{-1}(z),\eta)\frac{d^i\Delta_s(u_j(\eta)-x_0)}{d\eta^i}]- -\lambda\int_{a}^{C_j}K_{ij}(x,\eta)\varphi_i(\eta)d\eta\}$.

Таблица 2. Краевая задача для интегродифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}\left[f_{ij}(x)y^{(i)}(u_j(x)) + \lambda\int_a^b K_{ij}(x,\eta)y^{(i)}(\eta)d\eta \right] = f(x), & (1) \\ \sum_{i=0}^{n-1}\left[\alpha_{i\tau}y^{(i)}(x_0) + \beta_{i\tau}y^{(i)}(x_1) \right] = \gamma_\tau, \tau = \overline{0, n-1}, a \le x_0 < x_1 \le b, & (7) \\ y^{(i)}(u_j(x)) = y^{(i)}(x_0)\varphi_i(u_j(x)), i = \overline{0, n-1}, x \in E_{x_0}, & (8) \end{cases}$$

2.a. В случае $x_0 < x_1 \le c_j, \forall j = \overline{1, l}$, как уже отмечалось, краевая задача (1),(7),(8) сводится к решению задачи (1), (5), следует только заменить начальные функции $\varphi_i(u_j(x))$ в (6а), (6б) и (6в) на $\varphi_i^*(u_j(x)) = \varphi_i(u_j(x))\omega^{-1} \cdot \sum_{\tau=0}^{n-1}\gamma_\tau\omega_{i\tau}$, где $\omega = \det\left[\alpha_{i\tau} + \beta_{i\tau}\varphi_i(x_1)\right]$, $i, \tau = \overline{0, n-1}$ и $\omega_{i\tau}$ - алгебраические дополнения к элементам определителя ω.

2.b. В случаях, когда $\exists j = \overline{1, l}$, для которых $x_0 \le c_j < x_1$, сведём результаты в таблицу-схему.

	Запаздывающий тип	Нейтральный тип	Опережающий тип
Условия в уравнении (1)	$f_{n0}(x) \equiv 1$, $f_{nj}(x) \equiv 0$ и $K_{nj}(x,\eta) \equiv 0$ $\forall j = \overline{1,l}$.	$f_{n0}(x) \equiv 1$, $f_{nj}(x) \equiv 0$ $\forall j = \overline{1,l}$ и $\exists j \geq 1$, что $K_{nj}(x,\eta) \not\equiv 0$	$f_{n0}(x) \equiv 0$, $K_{n0}(x,\eta) \equiv 0$ и $\exists! j \neq 0$: $f_{nj}(x) \not\equiv 0$
Разрешающее	$\mu(z) + \sum_{j=0}^{l} [\int_{x_0}^{\mathrm{v}_j(z)} Q_j(z,t)\mu(t)dt + \lambda \int_{x_0}^{u_j(b)} T_j(z,t)\mu(t)dt] = R(z) \quad (19)$		
	Формулы в (17а)	Формулы в (17б)	Формулы в (17в)
Обозначения в разрешающем уравнении (19)	$z \equiv x, \mathrm{v}_j(x) \equiv u_j(x),$ $Q_j(z,t) \equiv D^{-1} \cdot$ $\cdot \sum_{i=0}^{n-1} f_{ij}(x) \frac{\partial^i \Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i},$ $T_j(z,t) \equiv \begin{cases} H_j(x,t) + G_j(x,t), & x_0 \leq t \leq x_1; \\ H_j(x,t), & x_1 \leq t \leq u_j(b), \end{cases},$ $\mathrm{H}_j(\mathrm{x,t}) = \mathrm{D}^{-1} \cdot$ $\cdot \int_{u_j^{-1}(t)}^{b} \sum_{i=0}^{n-1} [K_{ij}(x,\eta) \cdot$ $\cdot \frac{\partial^i \Delta_n(u_j(\eta)-t)}{\partial \eta^i}] d\eta +$ $+K_{n0}(x,t),$ $G_j(x,t) = G_j^*(x,t) + G_j^{**}(x,t) +$ $+G_j^{***}(x,t),\ R(z) \equiv B(x),$	$z \equiv x, \mathrm{v}_j(x) \equiv u_j(x),$ $Q_j(z,t) \equiv \Phi_j(x,t) = D^{-1} \cdot$ $\cdot \sum_{i=0}^{n-1} f_{ij}(x) \frac{\partial^i \Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i},$ $T_j(z,t) \equiv \begin{cases} H_j(x,t) + G_j(x,t), & x_0 \leq t \leq x_1; \\ H_j(x,t), & x_1 \leq t \leq u_j(b), \end{cases},$ $\mathrm{H}_j(\mathrm{x,t}) = D^{-1} \cdot$ $\cdot \int_{u_j^{-1}(t)}^{b} \sum_{i=0}^{n-1} [K_{ij}(x,\eta) \cdot$ $\cdot \frac{\partial^i \Delta_n(u_j(\eta)-t)}{\partial \eta^i}] d\eta +$ $+K_{nj}(x, u_l^{-1}(t)) \cdot$ $\cdot dt \cdot u_j'^{n-1}(u_j^{-1}(t)),$ $G_j(x,t) = G_j^*(x,t) + G_j^{**}(x,t) +$ $+G_j^{***}(x,t),\ R(z) \equiv B(x),$	$z \equiv u_l(x), \mathrm{v}_j(x) \equiv u_j(u_l^{-1}(z)),$ $Q_j(z,t) \equiv \frac{\Phi_j(u_l^{-1}(z),t)}{u_l'^n(u_l^{-1}(z))} = D^{-1} \cdot$ $\cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f_{ij}(u_l^{-1}(z))}{u_l'^n(u_l^{-1}(z))} \frac{\partial^i \Delta_n(u_j(u_l^{-1}(z))-t)}{(\partial u_l^{-1}(z))^i},$ $\forall j = 0, \overline{l-1},\ Q_l(z,t) \equiv 0,$ $T_j(z,t) \equiv \begin{cases} N_j(z,t) + M_j(z,t), & x_0 \leq t \leq x_1 \\ N_j(z,t), & x_1 \leq t \leq u_j(b), \end{cases},$ $N_j(z,t) \equiv \frac{H_j(u_l^{-1}(z),t)}{u_l'^n(u_l^{-1}(z))},$ $M_j(z,t) = \frac{G_j(u_l^{-1}(z),t)}{u_l'^n(u_l^{-1}(z))},$ $R(z) = \frac{B(u_l^{-1}(z))}{u_l'^n(u_l^{-1}(z))}.$
	где $G_j^*(x,t), G_j^{**}(x,t), G_j^{***}(x,t),\ B(x)$ вычисляются по формулам в уравнении (17)		

§ 3. Решение разрешающих интегральных уравнений в замкнутом виде

Решение в замкнутом виде получим, если в уравнении вида (19) параметры $r_i, i=\overline{1,n}$ таковы, что $R(z)\equiv 0$. Тогда решение однородного уравнения (19) будет $\mu(z)\equiv 0$ и решение первоначально поставленных начальных задач найдется по формуле (2)

$$y(z)=D^{-1}\sum_{s=1}^{n}y^{(s-1)}(x_0)\Delta_s(z-x_0). \qquad \textbf{(20)}$$

При i=0 для краевых задач решение найдем по формуле (16)

$$y(z)=D^{-1}\sum_{s=1}^{n}\Delta_s(z-x_0)\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_s\tau}{\omega}\gamma_\tau. \qquad \textbf{(21)}$$

Другой возможный вариант решения в замкнутом виде получим, если параметры $r_i, i=\overline{1,n}$ таковы, что $Q_j(z,t)\equiv 0$ и $T_j(z,t)\equiv 0$ $\forall j=\overline{0,l}$, тогда решение уравнения (19) будет $\mu(z)=R(z)$ и по формуле (2) определится решение начальных задач:

$$y(z)=D^{-1}[\sum_{s=1}^{n}y^{(s-1)}(x_0)\Delta_s(z-x_0)+\int_{x_0}^{z}\Delta_n(z-t)R(t)dt], \qquad \textbf{(22)}$$

и по формуле (16) – решение краевых задач:

$$y(z)=D^{-1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\Delta_s(z-x_0)\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{s\tau}}{\omega}[\gamma_\tau-D^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}R(t)dt]+\int_{x_0}^{z}\Delta_n(z-t)R(t)dt\ \right\}+R(z). \qquad \textbf{(23)}$$

Если условия $R(z)\equiv 0$ или условия $Q_j(z,t)\equiv 0, T_j(z,t)\equiv 0$ за счет выбора параметров выполнить не удается, то можно попытаться за счет выбора параметров сделать равными нулю или ядра $Q_j(z,t)$ или $T_j(z,t)$. Тогда при $Q_j(z,t)\equiv 0$ и $T_j(z,t)\not\equiv 0$ получим разрешающее уравнение типа Фредгольма, и к нему применимы все известные методы решения в замкнутом виде уравнений Фредгольма (например, метод для вырожденных ядер).

Если же за счет выбора параметров удается сделать $T_j(z,t) \equiv 0$ при $Q_j(z,t) \not\equiv 0 \ \forall j = \overline{0,l}$, тогда получим разрешающее уравнение типа Вольтерра, для них также в некоторых случаях известны возможные варианты решения в замкнутом виде.

Если выполнить эти условия за счет выбора параметров не представляется возможным, то практически всегда можно решить разрешающие уравнения вида (19), применив один из известных приближенных методов.

Пример 1.

Рассмотрим задачу Коши при начальном значении $x_0 = 0$ для уравнения запаздывающего типа.

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x-1) - 2\int_0^1 e^x \eta \, y(\eta) d\eta = xe^{x-1}, \\ y(x) = x, y'(x) = 1 \; на \; E_0^0 = [0], \\ y(x-1) = x-1, y'(x-1) = 1 \; на \; E_0^1 = [-1,0]. \end{cases}$$

Решение.

Начальное множество будет $E_0 = E_0^0 \cup E_0^1 = [-1,0]$.

Выпишем коэффициенты, ядро уравнения и остальные данные задачи $f_{20}(x) \equiv 1$, $f_{11}(x) = x$, $\lambda = 2$, $a = 0$, $b = 1$, $K_{00}(x,\eta) = \eta e^x$, $f(x) = xe^{x-1}$, $u_0(x) \equiv x$, $u_1(x) = x-1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Найдём выражения для построения ФГС и её производных по аргументу x:

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1$, $\Delta_1(x-t) = r_2 e^{r_1(x-t)} - r_1 e^{r_2(x-t)}$, $\Delta_2(x-t) = e^{r_2(x-t)} - e^{r_1(x-t)}$,

$$\frac{\partial \Delta_1(x-t)}{\partial x}(x-t) = r_1 r_2 e^{r_1(x-t)} - r_1 r_2 e^{r_2(x-t)},$$

$$\frac{\partial \Delta_2(x-t)}{\partial x} = r_2 e^{r_2(x-t)} - r_1 e^{r_1(x-t)},$$

$$y(x) = \frac{1}{r_2 - r_1}\left[\sum_{s=1}^{2} y^{(s-1)}(x_0)\Delta_s(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} \Delta_2(x-t)\mu(t)dt \right] =$$

$$=\frac{1}{r_2-r_1}[\,e^{r_2x}-e^{r_1x}+\int_0^x(e^{r_2(x-t)}-e^{r_1(x-t)})\mu(t)dt\,],$$

$$y'(x)\;=\;\frac{1}{r_2-r_1}[\,r_2e^{r_2x}-r_1e^{r_1x}+\int_0^x(r_2e^{r_2(x-t)}-r_1e^{r_1(x-t)})\mu(t)dt\,],$$

$$y''(x)\;=\;\frac{1}{r_2-r_1}[\,r_2^2e^{r_2x}-r_1^2e^{r_1x}+\int_0^x(r_2^2e^{r_2(x-t)}-r_1^2e^{r_1(x-t)})\mu(t)dt\,]+\mu(x).$$

Для сокращения объёма выкладок возьмём один из параметров, равный нулю (r_1=0), и по формулам в уравнении (6а) найдём

$$\Phi_0(x,t) = r_2^2e^{r_2(x-t)},\;\; \Phi_1(x,t) = r_2e^{r_2(x-1-t)},$$

$$H_0(x.t) = -\frac{2}{r_2}\int_t^1 e^x\eta(e^{r_2(\eta-t)}-1)d\eta\,,$$

$$F(x) = xe^{x-1}-r_2^2e^{r_2x}-x\,r_2e^{r_2(x-1)}+2\int_0^1 e^x\eta(e^{r_2\eta}-1)d\eta =$$

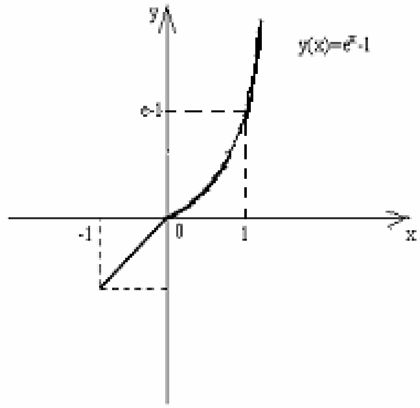
$$=xe^{x-1}-r_2^2e^{r_2x}-x\,r_2e^{r_2(x-1)}+2e^x(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{2}).$$

Нетрудно увидеть, что оптимальное значение параметра r_2=1, при котором $F(x)\equiv 0$, и тогда разрешающее уравнение однородное, а его решение $\mu(x)$=0. По формуле (2) найдём решение поставленной задачи $y(x)=e^x-1$.

Проверим, что найденное решение удовлетворяет поставленной начальной задаче

$$e^x+xe^{x-1}-2e^x\int_0^1\eta(e^\eta-1)d\eta = xe^{x-1},\; xe^{x-1}\equiv\; xe^{x-1}$$

и на чертеже хорошо видно выполнение начальных условий



Пример 2.

Рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{cases} y''(x)+2y'(x)-y'\left(\dfrac{x}{2}\right)-\displaystyle\int_0^1 y'(\eta)d\eta=0, \\ y(0)+y'(1)=0, \\ 2y'(0)-y'(1)=1. \end{cases}$$

Для данной задачи $x_0=0,\ x_1=1, E_0=E_0^0\bigcup E_0^1=[0]$, т.к. начальное множество состоит из одной точки. Следовательно, краевая задача в этом случае ставится так же, как и для уравнений с обыкновенным аргументом, без задания начальных функций. Выпишем коэффициенты, ядро и остальные данные задачи: $f_{10}(x)=2$, $f_{20}(x)=1$,

$f_{11}(x)=-1$, $f(x)=0$, $K_{10}(x,\eta)=-1$, $a=0$, $b=1$, $u_0(x)=x$, $u_1(x)=x/2$.

Решаем уравнения $x=0$ и $x/2=0$. Откуда $c_0=0$, $c_1=0$, следовательно, для уравнения запаздывающего типа имеем второй случай, т.к. выполняются условия $x_0\le c_j<x_1$, т.е. $0\le 0<1$.

Воспользовавшись формулами ФГС (2)-(3)-(4) для записи вида искомого решения при $n=2$, $x_0=0$ и положив $r_i=0$ (для сокращения объёма выкладок), найдём

$$y(x) = y(0) + y'(0)\frac{e^{z_2 x} - 1}{r_2} + \frac{1}{r_2}\int_0^x \left[e^{r_2(x-t)} - 1\right]\mu(t)dt,$$

$$y'(x) = y'(0)e^{r_2 x} + \int_0^x e^{r_2(x-t)}\mu(t)dt,$$

$$y''(x) = y'(0)r_2 e^{r_2 x} + r_2\int_0^x e^{r_2(x-t)}\mu(t)dt + \mu(x).$$

Откуда получаем:

$$y(1) = y(0) + y'(0)\frac{e^{z_2} - 1}{r_2} + \frac{1}{r_2}\int_0^1 \left[e^{r_2(1-t)} - 1\right]\mu(t)dt,$$

$$y'(1) = y'(0)e^{r_2} + \int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt.$$

Подставив полученные выражения для $y(1)$ и $y'(1)$ в краевые условия

$$\begin{cases} y(0) + y'(0)e^{r_2} + \int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt = 0, \\ 2y'(0) - y'(0)e^{r_2} - \int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt, \end{cases}$$

найдём

$$y'(0) = \frac{1 + \int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt}{2 - e^{r_2}}, \; y(0) = 1 - 2y'(0) = -\frac{e^{r_2} + 2\int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt}{2 - e^{r_2}}.$$

Затем подставим y(0) и y′(0) в ФГС (формулы (2)-(3)-(4))

$$y(x) = y(0) + y'(0)\frac{e^{z_2 x} - 1}{r_2} + \frac{1}{r_2}\int_0^x \left[e^{r_2(x-t)} - 1\right]\mu(t)dt = -\frac{e^{r_2}}{2 - e^{r_2}} -$$

$$-\frac{2}{2 - e^{r_2}}\int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt + \frac{e^{r_2 x} - 1}{r_2(2 - e^{r_2})}\left[1 + \int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt\right] +$$

$$+\frac{1}{r_2}\int_0^x\left[e^{r_2(x-t)}-1\right]\mu(t)dt,$$

$$y'(x)=y'(0)e^{r_2x}+r_2\int_0^x e^{r_2(x-t)}\mu(t)dt=\frac{e^{r_2x}}{2-e^{r_2}}\left[1+\int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt\right]+$$

$$+\int_0^x e^{r_2(x-t)}\mu(t)dt,\qquad ,$$

$$y''(x)=y'(0)r_2e^{r_2x}+r_2\int_0^x e^{r_2(x-t)}\mu(t)dt+\mu(x)=\mu(x)+$$

$$+\frac{r_2e^{r_2x}}{2-e^{r_2}}\left[1+\int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt\right]+r_2\int_0^x e^{r_2(x-t)}\mu(t)dt,$$

а полученные выражения для производных $y'(x)$ и $y''(x)$ в данное уравнение:

$$\mu(x)+\frac{r_2e^{r_2x}}{2-e^{r_2}}+\frac{r_2e^{r_2x}}{2-e^{r_2}}\int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt+r_2\int_0^x e^{r_2(x-t)}\mu(t)dt+\frac{2e^{r_2x}}{2-e^{r_2}}+$$

$$+\frac{2e^{r_2x}}{2-e^{r_2}}\int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt+2\int_0^x e^{r_2(x-t)}\mu(t)dt-\frac{e^{r_2\frac{x}{2}}}{2-e^{r_2}}-\frac{e^{r_2\frac{x}{2}}}{2-e^{r_2}}\int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt-$$

$$-\int_0^{\frac{x}{2}} e^{r_2(\frac{x}{2}-t)}\mu(t)dt=\int_0^1\left[\frac{e^{r_2\eta}}{2-e^{r_2}}+\frac{e^{r_2\eta}}{2-e^{r_2}}\int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt+\int_0^\eta e^{r_2(\eta-t)}\mu(t)dt\right]d\eta.$$

Изменив порядок интегрирования в двойном интеграле $\int_0^1 d\eta\int_0^\eta e^{r_2(\eta-t)}\mu(t)dt=\int_0^1 e^{-r_2t}\mu(t)dt\int_t^1 e^{r_2\eta}d\eta=r_2^{-1}\int_0^1\left[e^{r_2(1-t)}-1\right]\mu(t)dt$,

вычислив интеграл $\int_0^1 e^{r_2\eta}d\eta=\frac{e^{r_2}-1}{r_2}$ и, затем, перенеся известные выражения в правую часть равенства, придём к разрешающему интегральному уравнению

$$\mu(x)+\frac{(r_2+2)e^{r_2x}-e^{r_2\frac{x}{2}}-1}{2-e^{r_2}}\int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt+(2+r_2)\int_0^x e^{r_2(x-t)}\mu(t)dt-$$

$$-\int_0^{\frac{x}{2}} e^{r_2\left(\frac{x}{2}-t\right)}\mu(t)dt=\frac{e^{r_2}-1-r_2^2e^{r_2x}-2r_2e^{r_2x}+r_2e^{r_2\frac{x}{2}}}{r_2(2-e^{r_2})}=B(x)\ .$$

Теперь за счёт выбора параметра r_2 минимизируем свободную функцию

$$B(x)=\frac{e^{r_2}-1-r_2^2e^{r_2x}-2r_2e^{r_2x}+r_2e^{r_2\frac{x}{2}}}{r_2(2-e^{r_2})}\ ,$$

минимум которой достигается при $r_2=0$, так как

$$\lim_{r_2\to0}B(x)=\lim_{r_2\to0}\frac{1}{2-e^{r_2}}\lim_{r_2\to0}\frac{e^{r_2}-1-r_2^2e^{r_2x}-2r_2e^{r_2x}+r_2e^{r_2\frac{x}{2}}}{r_2}=$$

$$=\lim_{r_2\to0}\frac{e^{r_2}-1}{r_2}-\lim_{r_2\to0}\left(r_2e^{r_2x}+2e^{r_2x}-e^{r_2\frac{x}{2}}\right)=1-2+1=0\ .$$

Следовательно, разрешающее уравнение однородное и его решение будет $\mu(x)=0$, тогда решение поставленной краевой задачи найдётся:

$$y(x)=-\frac{e^{r_2}}{2-e^{r_2}}+\frac{e^{r_2x}-1}{r_2(2-e^{r_2})}=\lim_{r_2\to0}\frac{e^{r_2x}-1-r_2e^{r_2}}{r_2(2-e^{r_2})}=$$

$$=\lim_{r_2\to0}\frac{1}{2-e^{r_2}}\cdot\left[\lim_{r_2\to0}\frac{e^{r_2x}-1}{r_2}-\lim_{r_2\to0}e^{r_2}\right]=x-1.$$

Ответ: $y(x)=x-1$.

Сделаем проверку, подставив найденную функцию $y(x)=x-1$ в данное уравнение

$$0+2-1-\int_0^1 d\eta=0\Rightarrow0=0$$

и краевые условия

$$\begin{cases} -1+1=0 \\ 2-1=1 \end{cases},$$

которые также выполняются.

§4. Приближённые методы решения разрешающих интегральных уравнений

Для решения смешанных интегральных уравнений вида (19) применимы методы и способы приближённого решения интегральных уравнений (такие как представление решения рядами Тейлора, Неймана, Фурье; методами последовательных приближений, осреднения функциональных поправок, сплайн-интерполяционными методами и др.). Наличие параметров в структуре функций в разрешающем уравнении (19) даёт возможность ускорить сходимость любого из известных приближённых методов за счёт оптимального их выбора. Так, например, применив метод последовательных приближений к уравнению (19) и приняв за начальное приближение функцию $\mu_0(z)=R(z)$, получим рекуррентную формулу для последовательных приближений:

$$\mu_k(z) = R(z) - \sum_{j=0}^{l}\left[\int_{x_0}^{v_j(z)} Q_j(z,t)\mu_{k-1}(t)dt + \lambda\int_{x_0}^{u_j(b)} T_j(z,t)\mu_{k-1}(t)dt\right], \qquad (24)$$

k=1,2,…

Для доказательства сходимости метода и существования решения, как обычно, составим функциональный ряд

$$\mu_0(z)+[\mu_1(z)-\mu_0(z)]+[\mu_2(z)-\mu_1(z)]+...+[\mu_k(z)-\mu_{k-1}(z)]+... \qquad (25)$$

При условии ограниченности функций

$|R(z)| \le M$, $|Q_j(z,t)| \le N_j$, $|T_j(z,t)| \le P_j$ $\forall j=\overline{0,l}$ в квадрате $a \le x,t \le b$ (26)

оценим по модулю члены ряда

$$\left|\mu_0(z)\right| = \left|R(z)\right| \le M,$$

$$\left|\mu_1(z)-\mu_0(z)\right| = \left|\sum_{j=0}^{l}\left[\int_{x_0}^{v_j(z)} Q_j(z,t)\mu_0(t)dt + \lambda\int_{x_0}^{u_j(b)} T_j(z,t)\mu_0(t)dt\right]\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{j=0}^{l}\left[\int_{x_0}^{b} N_j M dt + |\lambda|\int_{x_0}^{b} P_j M dt\right]\right| \le M\,|b-x_0|\left[\sum_{j=0}^{l} N_j + |\lambda|\sum_{j=0}^{l} P_j\right] \le$$

$$\le M\left|b-x_0\right|(N+|\lambda|P),\ \text{ãäå}\ N=\sum_{j=0}^{l} N_j,\ P=\sum_{j=0}^{l} P_j,$$

$$\left|\mu_2(z)-\mu_1(z)\right| = \left|\sum_{j=0}^{l}\left[\int_{x_0}^{v_j(z)} Q_j(z,t)\mu_1(t)dt + \lambda\int_{x_0}^{u_j(b)} T_j(z,t)\mu_1(t)dt\right]\right| \le$$

$$\le M\,|b-x_0|\,(N+|\lambda|P)\left|\sum_{j=0}^{l}\left[\int_{x_0}^{b} N_j dt + |\lambda|\int_{x_0}^{b} P_j dt\right]\right| \le M\left|b-x_0\right|^2 (N+|\lambda|P)^2,$$

....

$$\left|\mu_k(z)-\mu_{k-1}(z)\right| \le M\,|b-x_0|^k\,(N+|\lambda|P)^k,$$

....

и из полученных оценок построим для ряда (25) мажорирующий ряд

$$M + M\,|b-x_0|\,(N+|\lambda|P) + \ldots + M\,|b-x_0|^k\,(N+|\lambda|P)^k + \ldots \qquad (27).$$

Ряд (27) составлен из членов геометрической прогрессии и поэтому сходится при

$$q = |b-x_0|\,(N+|\lambda|P) < 1 \qquad (28).$$

Если условие (28) выполняется, то ряд (25) по критерию Вейерштрасса сходится равномерно и абсолютно и единственное решение уравнения (19) существует и может быть найдено приближённо по формуле (24). При этом погрешность приближённого решения δ_{μ_k} может быть вычислена по формуле

$$\delta_{\mu_k} \le \frac{M\,|b-x_0|^k\,(N+|\lambda|P)^k}{1-|b-x_0|\,(N+|\lambda|P)}\ . \qquad (29)$$

Условие (28) в общем случае довольно жёсткое, поэтому рассмотрим ещё один возможный вариант приближённого решения. За счёт выбора части параметров минимизируем ядра $T_j(z,t)$, а остальные параметры далее используются для ускорения метода последовательных приближений. Если удалось сделать эти ядра достаточно малыми (что иногда выполняется автоматически, например, для дифференциальных уравнений запаздывающего типа, где $T_j(z,t)\equiv 0 \quad \forall j=\overline{0,l}$), то мы можем рассматривать разрешающее уравнение типа Вольтерра

$$\mu(z)+\sum_{j=0}^{l}\int_{x_0}^{V_j(z)}Q(z,t)\mu(t)dt=R(z) \qquad (30)$$

Рекуррентная формула для последовательных приближений будет:

$$\mu_k(z)=R(z)-\sum_{j=0}^{l}\int_{x_0}^{\mathrm{v}_j(z)}Q(z,t)\mu_{k-1}(t)dt, k=1,2,... ,$$

и при тех же ограничениях (26) для членов ряда (25) получим оценки: $\left|\mu_0(z)\right|=\left|R(z)\right|\le M$,

$$\left|\mu_1(z)-\mu_0(z)\right|=\left|\sum_{j=0}^{l}\int_{x_0}^{\mathrm{v}_j(z)}Q_j(z,t)\mu_0(t)dt\right|\le\left|\sum_{j=0}^{l}\int_{x_0}^{b}N_jMdt\right|\le M\left|z-x_0\right|N, N=\sum_{j=0}^{l}N_j,$$

$$\left|\mu_2(z)-\mu_1(z)\right|=\left|\sum_{j=0}^{l}\int_{x_0}^{\mathrm{v}_j(z)}Q_j(z,t)[\mu_1(t)-\mu_0(t)]dt\right|\le\left|\sum_{j=0}^{l}\int_{x_0}^{z}N_jMN\ |\ t-x_0\ |\ dt\right|\le$$

$$\le MN^2\frac{\left|z-x_0\right|^2}{2},$$

....

$$\left|\mu_k(z)-\mu_{k-1}(z)\right|\le MN^k\frac{\left|z-x_0\right|^k}{k!},$$

....

Мажорирующий ряд для ряда (25), построенный из полученных оценок, будет:

$$M+MN\,|\,b-x_0\,|+MN^2\frac{|\,b-x\,|^2}{2!}+...+MN^k\frac{|\,b-x\,|^k}{k!}+... \ . \qquad (32)$$

Ряд (32) по признаку Даламбера всегда сходится, так как

$$l=\lim_{k\to\infty}\frac{MN^{k+1}\,|\,b-x_0\,|^{k+1}\cdot k!}{(k+1)!\cdot MN^k\,|\,b-x_0\,|^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{N\,|\,b-x_0\,|}{k+1}=0<1\,.$$

Следовательно, ряд (25)по критерию Вейерштрасса всегда сходится равномерно и абсолютно, и для решения уравнения (30) получаем оценку:

$$|\mu(z)| \le Me^{N|b-x_0|} \qquad (33).$$

Оценку погрешности δ_{μ_k} k-го приближения решения уравнения (30) для отрезка $z \in [a,b]$, воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получим в виде

$$\delta_{\mu_k} \le \frac{|b-x_0|^{k+1}}{(k+1)!} MN^{k+1} e^{N\theta|b-x_0|},\ 0<\theta<1 \qquad (34).$$

Приближённое решение первоначально поставленной задачи получим, воспользовавшись формулой ФГС (2)

$$y(z) \approx y_k(z) = D^{-1}\left[\sum_{s=1}^{n} y^{(s-1)}(x_0)\Delta_s(z-x_0) + \int_{x_0}^{z} \Delta_n(z-t)\mu_k(t)dt\right],$$

откуда следует, что погрешность δ_{y_k} этого решения будет

$$\delta_{y_k} \le \delta_{\mu_k} \max_{z\in[a,b]} \left|\int_{x_0}^{z} \Delta_n(z-t)dt\right| \ . \qquad (36)$$

Из оценок ряда (25) следует, что последовательные приближения сходятся к искомому решению тем быстрее, чем меньше величина N, которую можно считать функцией параметров $r_i,\ i=\overline{1,n}$. Получим формулу для этой функции, предварительно разложив в выражении $Q_j(z,t)$ определители $\frac{\partial^i \Delta_n(u_j(z)-t)}{\partial z}$. по элементам последней строки:

$$\frac{\partial^i \Delta_n(u_j(z)-t)}{\partial z^i} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^i e^{r_1(u_j(z)-t)} & r_2^i e^{r_2(u_j(z)-t)} & \dots & r_n^i e^{r_n(u_j(z)-t)} \end{vmatrix} u_j'^n(z) =$$

$$
=\sum_{\nu=0}^{n} r_\nu^i e^{r_1(u_j(z)-t)} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & \dots & r_{i-1} & r_{i+1} & \dots & r_n \\ . & . & . & . & . & . \\ r_1^{n-2} & \dots & r_2^{n-2} & r_{i+1}^{n-2} & \dots & r_n^{n-2} \end{vmatrix} \; u_j'^n(z). \qquad (37)
$$

Затем, вводя обозначения для результатов вычислений

$$
\max\left|f_{ij}(z)\right| = m_{ij}, \aleph_j^{r_\nu} = \begin{cases} [\max\limits_{z,t\in[\alpha,\beta]} \exp(u_j(z)-t)]^{r_\nu} \max\limits_{\alpha\le z\le\beta}\left|u_j'^n(z)\right|, r_\nu \ge 0, \\ [\min\limits_{z,t\in[\alpha,\beta]} \exp(u_j(z)-t)]^{r_\nu} \max\limits_{\alpha\le z\le\beta}\left|u_j'^n(z)\right|, r_\nu < 0, \end{cases} \qquad (38)
$$

и производя замену функций в формулах для $Q_j(z,t)$ на их максимальные значения, получим выражение для $N=N(r_1,r_1,..,r_n)$ как функцию n параметров

$$
N=\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}\frac{m_{ij}}{D}\sum_{\nu=0}^{n}| r_\nu^i | \aleph_j^{r_\nu} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & \dots & r_{i-1} & r_{i+1} & \dots & r_n \\ . & . & . & . & . & . \\ r_1^{n-2} & \dots & r_2^{n-2} & r_{i+1}^{n-2} & \dots & r_n^{n-2} \end{vmatrix}. \qquad (39).
$$

Следовательно, необходимо определить параметры, минимизируя функцию $N(r_1,r_2,..,r_n)$. Наименьшее значение этой функции существует, так как $N(r_1,r_2,..,r_n) \ge 0$. Величина параметров влияет только на скорость сходимости последовательных приближений, поэтому их можно определить приближённо, если возникли затруднения с точным определением. Погрешность первоначальной задачи δ_{y_k} можно посчитать, воспользовавшись формулами ФГС (34) и (36).

Пример 3.

Найти приближённое решение задачи Коши

$$
\begin{cases} y''(x) + y'\left(\dfrac{x}{5}\right) = 1, \\ y(0)=1, y'(0)=0, \\ E_0 = [0], x\in[-1,1]. \end{cases}.
$$

Для данной задачи $x_0 = 0 \grave{e}\, E_0 = E_0^0 \bigcup E_0^1 = [0]$. Так как начальное множество состоит из одной точки, то задача Коши ставится так же, как и для уравнений с обыкновенным аргументом.

Выпишем данные задачи: $f_{20}(x)=1$, $f_{11}(x)=1$, $f(x)=1$, $u_0(x)=x$ и $u_1(x)=x/5$. Определим C_0 и C_1: $x = 0 \Rightarrow C_0 = 0 \;\grave{e}\; \frac{x}{5} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$. Приближённое решение будем искать с помощью ФГС (2), положив $r_2=r_1,=r$, тогда в соответствии с формулами ФГС (2)-(3)-(4) главы I при n=2 и $x_0=0$ найдем:

$$y(x) = y(0)e^{rx}(1-rx) + y'(0)xe^{rx} + \int_0^x (x-t)e^{r(x-t)}\mu(t)dt = e^{rx}(1-rx) +$$

$$+\int_0^x (x-t)e^{r(x-t)}\mu(t)dt,$$

$$y'(x) = -y(0)r^2xe^{rx} + y'(0)(1+rx)e^{rx} + \int_0^x r(1+r(x-t))e^{r(x-t)}\mu(t)dt = -r^2xe^x +$$

$$+\int_0^x (1+r(x-t))e^{r(x-t)}\mu(t)dt,$$

$$y''(x) = -y(0)r^2e^{rx}(1-rx) + y'(0)(2+rx)e^{rx} + \int_0^x r(2+r(x-t))e^{r(x-t)}\mu(t)dt + \mu(x) =$$

$$= -r^2e^{rx}(1-rx) + r\int_0^x (2+r(x-t))e^{r(x-t)}\mu(t)dt + \mu(x).$$

Подставив полученные выражения для искомой функции и её производных в уравнение

$$\mu(x) - r^2e^{rx}(1-rx) + r\int_0^x (2+r(x-t))e^{r(x-t)}\mu(t)dt - r^2\frac{x}{5}e^{r\frac{x}{5}} +$$

$$+\int_0^{\frac{x}{5}} \left(1 + r\left(\frac{x}{5} - t\right)\right)e^{r\left(\frac{x}{5}-t\right)}\mu(t)dt = 1,$$

нетрудно увидеть, что наиболее простой вид разрешающего уравнения получим при r=0

$$\mu(x)+\int_0^{\frac{x}{5}}\mu(t)dt=1.$$

Запишем рекуррентную формулу

$$\mu_k(x)=1-\int_0^{\frac{x}{5}}\mu_{k-1}(t)dt$$

и вычислим последовательные приближения, положив $\mu_0(x)=1$;

$$\mu_1(x)=1-\int_0^{\frac{x}{5}}dt=1-\frac{x}{5};$$

$$\mu_2(x)=1-\int_0^{\frac{x}{5}}\left(1-\frac{t}{5}\right)dt=1-\left(t-\frac{t^2}{2\cdot 5}\right)\Bigg|_0^{\frac{x}{5}}=1-\frac{x}{5}+\frac{x^2}{2\cdot 5^3};$$

$$\mu_3(x)=1-\int_0^{\frac{x}{5}}\left(1-\frac{t}{5}+\frac{t^2}{2\cdot 5^3}\right)dt=1-\frac{x}{5}+\frac{x^2}{2\cdot 5^3}-\frac{x^3}{2\cdot 3\cdot 5^6};$$

……………………………………………………………

$$\mu_k(x)=1-\sum_{p=1}^{k}\frac{(-1)^p x^p}{p!5^{s_p}},\ s_p=s_{p-1}+(p-1)$$

....

$$\mu(x)=1-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p x^p}{p!5^{s_p}}.$$

За приближённое решение примем

$$\mu_2(x)=1-\frac{x}{5}+\frac{x^2}{2\cdot 5^3},$$

тогда погрешность такого решения по теореме Лейбница будет

$$\delta_{\mu_2}\le\max_{|x|\le 1}\left|\frac{x^3}{2\cdot 3\cdot 5^6}\right|\le 0{,}0000108.$$

Затем найдём приближённое решение первоначально поставленной задачи

$$y(x)=e^{rx}(1-rx)+\int_0^x (x-t)e^{r(x-t)}\mu(t)dt\approx 1+\int_0^x (x-t)\left(1-\frac{t}{5}+\frac{t^2}{2\cdot 5^3}\right)dt=$$

$$=1+x^2-\frac{x^3}{10}+\frac{x^4}{750}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{15}-\frac{x^4}{1000}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{30}+\frac{x^4}{3000}$$

и определим погрешность δ_{y_2} этого решения, воспользовавшись формулой(36)

$$\delta_{y_2}\le\max_{|x|\le 1}\left|\int_0^x (x-t)\delta_{\mu_2}dt\right|=0,0000108\cdot\max_{|x|\le 1}\left|\frac{x^2}{2}\right|=0,0000054\,.$$

Если подставить полученное приближённое решение в заданное уравнение, предварительно вычислив

$$y'(x)=x-\frac{x^2}{10}+\frac{x^3}{750},\quad y''(x)=1-\frac{x}{5}+\frac{x^2}{250},$$

то получим невязку $\Delta f=\max\limits_{|x|\le 1}\left|\tilde{f}(x)-f(x)\right|$, где $\tilde{f}(x)$ - приближённое значение левой части уравнения

$$1-\frac{x}{5}+\frac{x^2}{250}+\frac{x}{5}-\frac{x^2}{250}+\frac{x^3}{750\cdot 5^3}=1,$$

$$\Delta f=\max_{|x|\le 1}\left|\frac{x^3}{750\cdot 5^3}\right|\approx 0,00001006.$$

Вопросы к зачету

Интегро-дифференциальные (и-д.) уравнения.

1. Основные понятия, определения и теоремы.
2. Методы преобразования интегродифференциальных уравнений к разрешающим уравнениям.
3. Решение разрешающих интегральных уравнений специального вида.
4. Построение итерированных ядер и резольвента.
5. Построение характеристического полинома и минорных рядов. Рекуррентные формулы.
6. Построение общего решения и решения задачи Коши.
7. Построение минорных рядов высших порядков.
8. Нахождение фундаментальных чисел и функций однородных разрешающих уравнений.
9. Применений аналогов трех теорем Фредгольма к решению интегродифференциальных уравнений.
10. Решение специализированной задачи Коши.
11. Линейные неоднородные интегродифференциальные уравнения.
12. Альтернативные методы преобразования линейных дифференциальных операторов.
13. Приближенные методы решения интегральных уравнений.
14. Оценка погрешности приближенных решений.
15. Решение линейных краевых задач.
16. Уравнения с отклоняющимся аргументом.
17. Функция структуры и ее применение к решению интегродифференциальных уравнений.
18. Решение интегродифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в замкнутом виде.
19. Приближенное решение разрешающих уравнений.

Вопросы экзамена по спецкурсу, спецсеминару
IV курс, 7-8 сем.
Интегро-дифференциальные (и-д.) уравнения.

20. Различные виды и-д. уравнений. Физические примеры.
21. Сингулярно-возмущенные и-д. уравнения.
22. Линейные и-д. уравнения. Задачи приводящие к и-д. уравнениям.
23. Построение разрешающего интегрального уравнения в случае n>m и его решение с помощью ряда Неймана.
24. Итерированные ядра и резольвента. Интегральные уравнения резольвенты.
25. Метод Некрасова А.И. Аналоги детерминантов Фредгольма.
26. Исследование на сходимость детерминантов. Доказательство единственности.
27. Аналог первой теоремы Фредгольма.
28. Рекурентные формулы для вычисления коэффициентов рядов.
29. Миноры высших порядков ядра интегро-дифференциального уравнения.
30. Связь между разрешающими уравнениями и между детерминантами.
31. Разложение детерминантов высших порядков по строкам и столбцам.
32. Построение фундаментальных функций для разрешающего интегрального уравнения и их свойства.
33. Линейная независимость фундаментальных функций и полнота решений. Аналог второй теоремы Фредгольма.
15. Связь между решениями двух интегральных разрешающих уравнений.
16. Однородный случай. Аналог третьей теоремы Фредгольма.

17. Задача Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма.
18. Специализированная задача Коши.
19. Решение неоднородных линейных интегро-дифференциальных уравнений.
20. Случай $m \geq n$. Задача Коши для этого случая.
21. Решение линейных интегро-дифференциальных уравнений, опираясь на фундаментальную систему решений внутреннего дифференциального оператора.
22. Решение задачи Коши без использования фундаментальных систем решений внутреннего и внешнего дифференциальных операторов.
23. Приближенное решение линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма.

Глоссарий:

1. Асимптоматика – неограниченное приближение к определенному объекту
2. Алгоритм – последовательность точно описанных операций
3. Альтернативные методы – другие методы решения
4. Итерация – последовательное применение математических операций
5. Оператор – последовательность математических операций, записанная аналитическим выражением
6. Разрешающее уравнение – уравнение имеющее те же решения, что и данное, но более простое по форме и в решении
7. Рекуррентная формула – формула позволяющая шаг за шагом определить значения искомой величины или решения
8. ФГС- функции гибкой структуры – функции изменяющие свою структуру в зависимости от введенных значений параметров

Тематика курсовых работ

1. Функции гибкой структуры и их применение к решению различных задач.
2. Интегральные уравнения Фредгольма.
3. Интегральные уравнения Вольтерра.
4. Смешанные интегральные уравнения.
5. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом.
6. Аналоги теоремы Фредгольма для интегродифференциальных уравнений.
7. Специализированная задача Коши для вырожденных ядер (общий случай).
8. Исследование и решение разрешающих уравнений.
9. Краевые задачи для интегродифференциальных уравнений.
10. Приближенные аналитические методы решения интегродифференциальных уравнений.
11. Приближенные численные методы решения интегродифференциальных уравнений.
12. Интегродифференциальные уравнения с частными производными.

13. Интегродифференциальные уравнения Фредгольма с отклоняющимся аргументом. Исследование и разработка программ решения на ЭВМ.
    a. уравнений запаздывающего типа
    b. уравнений нейтрального типа
    c. уравнений опережающего типа
14. Интегродифференциальные уравнения Вольтерра с отклоняющимся аргументом. Исследование и разработка программ решения на ЭВМ.
    a. уравнений запаздывающего типа
    b. уравнений нейтрального типа
    c. уравнений опережающего типа
15. Смешанные интегральные уравнения с отклоняющимся аргументом. Исследование и разработка программ решения на ЭВМ.
    a. интегральные операторы применяются раздельно
    b. интегральные операторы применяются последовательно
16. Интегродифференциальные уравнения в частных производных. Реализация решения на ЭВМ.
17. Системы интегродифференциальных уравнений. Программа решения на ЭВМ.

БУРЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

“У Т В Е Р Ж
Д А Ю”
Проректор по УР
_______Батуева И.С.
“___”__________2005
г.

У Ч Е Б Н А Я П Р О Г Р А М М А

по курсу /дисциплина/___по спецкурсу, спецсеминару
«Интегро-дифференциальные уравнения и их приложения»
____
для специальности 010200/010501.65 прикладная математика и информатика _______
Кафедра__"Прикладная математика"

Программа составлена на основании стандартов

Специальности (номер)_ 010200/010501.65 прикладная математика и информатика ___________________________________

с учетом национально-регионального компонента

Программа утверждена
на заседании кафедры
« » 200 г. Протокол №__
__________ (________________)

подпись

Программа утверждена
учебно-методической
комиссией факультета «___» _____200 г.
__________ (_________________)

подпись

Пояснительная записка

Цель курса - дальнейшее углубленное изучение теории дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений как с обыкновенным так и с отклоняющимся аргументом и применение расмотренных теорий к прикладным задачам различных областей знаний.

Задачи курса - вытекают из целей: продолжить изучение интегральных уравнений, рассмотреть интегральные и интегро-дифференциальные уравнения с обыкновенным аргументом, дифференциальные и другие типы функциональных уравнений с отклоняющимся аргументом, а также их применение к различным прикладным задачам.

Тематика курса

Раздел 1. Интегро-дифференциальные уравнения (и.д.у.) и их приложения.

Тема 1. Основные понятия и определения.

Тема 2. Решение и.-д.уравнений

Тема 3. Аналоги детерминантов Фредгольма.

Тема 4. Начальная задача для и.-д.уравнений.

Тема 5. Другие методы решения и.д.уравнений.

Раздел 2. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом (д.у.с о.а.).

Тема 1. Основные понятия и определения. Теорема существования.

Тема 2. Линейные уравнения.

Тема 3. Приближенные методы интегрирования д.у. с о.а.

Тема 4. Теория устойчивости.

Тема 5. Периодические решения. Свойства и теоремы существования. Периодические решения линейных и квазилинейных уравнений.

Раздел 4. Интегро-дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом.

Тема 1. Основные понятия и определения. Уравнения Вольтера.

Тема 2. Уравнения Фредгольма.

Тема 3. Краевые задачи.

Раздел 1. Интегро-дифференциальные уравнения (и.д.у.) и их приложения.

Тема 1. Основные понятия и определения.

Различные виды и.-д.у. Задачи приводящие к и.-д.у. Различные виды и.-д.у. Физические примеры. Сингулярно возмущенные и.-д.у.

Тема 2. Решение и.-д.уравнений

Построение разрешающего интегрального уравнения и его решение с помощью ряда Неймана в случае n>m. Итерированые ядра и резольвента. Интегральные уравнения резольвенты. Метод акад.Некрасова А.И.

Тема 3. Аналоги детерминантов Фредгольма.

Исследование на сходимость детерминантов. Доказательство единственности. Аналог первой теоремы Фредгольма. Рекурентные формулы для вычисления коэффициентов рядов. Миноры высших порядков ядра и-д.у. Связь между разрешающими уравнениями и между детерминантами. Разложение детерминантов высших порядков по строкам и столбцам. Построение фундаментальных функций для разрешающего интегрального уравнения. Полнота решений. Аналог второй теоремы Фредгольма. Однородный случай. Аналог третьей теоремы Фредгольма.

Тема 4. Начальная задача для и.-д.уравнений.

Задача Коши для линейного и.-д.у. типа Фредгольма. Специализированная задача Коши. Решение неоднородных линейных и.-д.у. и случай $m \geq n$. Задачи Коши для этих случаев.

Тема 5. Другие методы решения и.д.уравнений.

Решение с помощью фундаментальной системы внутреннего дифференциального оператора. Решение задачи Коши и краевой задачи без использования фундаментальных систем решений.

Раздел 2. Интегро-дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом.

Тема 1. Основные понятия и определения. Уравнения Вольтера.

Начальная задача для уравнений Вольтерра запаздывающего, нейтрального и опережающего типов. Решения в замкнутом виде. Приближенные методы решения.

Тема 2. Уравнения Фредгольма.

Начальная задача для уравнений Фредгольма запаздывающего, нейтрального и опережающего типов.

Тема 3. Краевые задачи.

Краевая задача для различных типов уравнений Вольтерра. Краевая задача для различных типов уравнений Фредгольма. Приложения и-д.у. с о.а.

Литература.

1. Привалов И.И. Интегральные уравнения.
2. Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики.
4. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям.
5. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию.
6. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Задачи и упражнения.
7. Виарда Г. Интегральные уравнения.
8. Петровский И.Г. Линейные интегральные уравнения.
9. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения.
10. Эльегольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.
11. Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом.
12. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений.
13. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.
14. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование.
15. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений.
16. Коротков В.Б. Методы решения интегральных уравнений.
17. Журналы, сборники, вестники, сборники тезисов.
18. Шишкин Г.А. Линейные интегро-дифференциальные уравнения. Учебное пособие. Часть I, II, III, IV.
19. Шишкин Г.А. Линейные интегро-дифференциальные уравнения Фредгольма с запаздывающим аргументом. Монография. Изд-во БГУ. – Улан-Удэ, 2006г.

Литература

1. Александрийский Б.И. К теории некоторых линейных интегро-дифференциальных систем // ДАН. СССР, т.91, № 2.- М.1953 – С.184-194.
2. Бараталиев К.Б. Приближенное решение некоторых задач для интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. – Фрунзе, 1965.
3. Быков Я.В. К теории линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Труды физ.-мат.фак.Кирг.ун-та, в.2.– Фрунзе, 1953.– С.67-83.
4. Быков Я.В. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // ДАН. СССР, в.86, №2.-М.1952 – С.85-99.
5. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе, 1957.- С.327.
6. Васильев В.В. К вопросу об интегрировании систем линейных интегро-дифференциальных уравнений // Уч.зап. Иркутского гос. пед. ин-та, в.9.-Иркутск, 1946.
7. Васильев В.В. Решение линейных обобщенных интегро-дифференциальных уравнений // ПММ, в.15.-М., 1951.
8. Васильев В.В. Решение задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений // ДАН СССР, в.100, №5-М., 1955.
9. Васильев В.В. К вопросу о решении краевой задачи для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений // Уч.зап. Иркутского гос. пед. ин-та, в.17.-Иркутск, 1960.-С.159-168.
10. Васильев В.В. К вопросу о решении задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений // Изв.высш.уч.зав., Матем. №4.- М., 1961.-С.8-24.
11. Васильев В.В. Решение одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений // Труды Иркутского у-та, серия матем., т.26.-Иркутск, 1968.-С.3-17.
12. Виграненко Т.И. О решении одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Труды ИМИ АН Узб.ССР, в.10,ч.2.-Ташкент, 1953.
13. Виграненко Т.И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // Зап.Лен.горн.ин-та, в.33.-Л., 1956.-С.176-186.
14. Виграненко Т.И. Об одной граничной задаче для линейных интегро-дифференциальных уравнений // Зап.Лен.горн.ин-та, в.33.-Л., 1956.-С.161-176.

15. Вулих В.З. Введение в функциональный анализ.-М. «Наука», 1967.

16. Галаев Б.М. Теоремы существования решений интегро-дифференциальных уравнений // ДАН СССР, в.85, №3-М., 1956.

17. Егоров А.И. Теорема существования решений интегро-дифференциальных уравнений // Труды физ.-мат.фак.Кирг.ун-та, в.2.-Фрунзе, 1953.-С.119-123.

18. Женхэн О. О существовании и единственности решений интегро-дифференциальных уравнений// ДАН СССР, в.86, №2-М., 1952 и ДАН СССР, в.91, №6-М., 1953.

19. Каменский Г.А. К общей теории уравнений с отклоняющимся аргументом // ДАН СССР, 120, 4. 1958.-С.697-700.

20. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. –М. «Наука», 1962.

21. Кокарева Т.А. Некоторые теоремы существования аналитических решений для интегро-дифференциальных уравнений // ДАН СССР, в.79, №1-М., 1951

22. Кривошеин Л.Е. Об одном методе решения некоторых линейных интегро-дифференциальных уравнений // Изв.высш.уч.зав., Матем. №3.-М., 1960.-С.168-172.

23. Кривошеин Л.Е. Приближенные методы решения обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений. –Фрунзе, 1962.

24. Куликов Н.К. Инженерный метод решения и исследования обыкновенных дифференциальных уравнений.-М. «Высшая школа»,1964.-207 с.

25. Куликов Н.К. Решение и исследование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе функций с гибкой структурой. Тематический сб. МТИПП.-М.,1974.-207 с.

26. Ландо Ю.К. Краевая задача для линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Учен зап. Минского пед.ин-та, в.6.-Минск, 1956.-С.257-269.

27. Ландо Ю.К. Функция Грина краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Учен зап. Минского пед.ин-та, в.9.-Минск, 1958.-С.65-70.

28. Ландо Ю.К. Краевая задача для линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра в случае распадающихся краевых условий // Изв.высш.уч.зав., Матем. №3.- М., 1961.-С.56-65.

29. Ловит У.В. Линейные интегральные уравнения.-М.Гос.издат., 1957.-266 с.

30. Назаров Н.Н. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // Тр.ИММ Ан Узб.ССР, в.4.-Ташкент, 1948.

31. Некрасов А.И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // ТР.Цаги, в.190.-М., 1934.

32. Николенко В.Н. Задача Коши для интегро- дифференциальных уравнений типа Фредгольма // -М. УМН., т.7, в.5.,1952.-С.225-228.

33. Привалов И.И. Интегральные уравнения .-М. ГТТИ, 1935.

34. Эсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. -М. «Наука», 1971.-296 с.

35. Buscham W. Die Zuruckfuhrung von spezielen linearen // Integro-Differentiql gleichungen auf gewohuliche Integralgleichungen. Zeitschrift. Angew/ Math.Mech/, 32, 1952

36. Volterra V. Lecons sur les eguations integrals et les eguations integro-differentielles. -Paris. 1913.

37. Volterra V. Varigzioni e fluttuazioni del numero d'indivindin specie animali conviventi //R.Comit Tallass. Jt Met.31.1927.

38. Volterra V. La teoria deifunzionali appiata aifenomeni ereditari // Atti congr.lut.Mat.,Bolongna, v.1,1928.

39. Volterra V. Teory of functionals and of integral and integro-differentiel eguations – London-Grasqon, 1930.

40. Volterra V. The general equations of biological strife in the case of historical actions // Proc.Edinburgh Math. Soc.6.- 1939.- C.4-10.

41. Volterra V. Teorie of functionals and of integral and integro-differential eguations – London, 1931.

42. Шишкин Г.А. Линейные интегро- дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами // Научный отчет во ВНГИ Центре, Б 669678, 31.05.1978, гл.II, §5,-С.14-17.

43. Шишкин Г.А. Обоснование одного метода решения интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с функциональным запаздыванием// Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. СО АН СССР, ин-т мат-ки.-Новосибирск, 1980.-С.172-178.

44. Шишкин Г.А. Постановка и решение линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с отклоняющимся аргументом // Неклассич.ур-я матем. физики. Сб.н.тр. СО АН СССР.-Новосибирск, 1986.-С.214-217.

45. Шишкин Г.А., Сенина И.В. Решение интегро-дифференциальных уравнений спомощью функций с гибкой структурой // Математика и методика ее преподавания. –Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2000.-С.111-113.

46. Шишкин Г.А. Исследование возможностей преобразования интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом к уравнениям с обыкновенным аргументом // Математика и методика ее преподавания. В.1–Улан-Удэ, 2000.-С.108-111; В.2., 2001.-С.71-73; В.3., 2002.-С.71-73; В.4., 2003.-С.112-115.

47. Шишкин Г.А. Преобразование начальной задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с отклоняющимся аргументом к уравнениям без отклонений аргумента// Математика, ее приложения и математическое образование. Матер.междун.конф. –Улан-Удэ, 2002.-С.139-145.

48. Шишкин Г.А. Преобразование краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с запаздывающим аргументом нейтрального типа к уравнениям без отклонений аргумента // Вестник Бурятского университета, «Математика и информатика». Серия 13, в.1, Улан-Удэ, 2004.-С.42-47.

49. Шишкин Г.А. Исследование возможностей преобразования краевой задачи для интегро- дифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом опережающего типа к уравнениям с обыкновенным аргументом // Вестник Бурятского университета «Математика и информатика», Серия 13, в.2, Улан-Удэ, 2005.-С.98-101.

Содержание

Введение…………………………………………………. 3
Глава I. Аналоги теорем Фредгольма……………………… 5
§1. Аналог первой теоремы Фредгольма ………………….. 5
1. Построение разрешающего уравнения, когда порядок внешнего дифференциального оператора больше порядка внутреннего …………………... . . . .…. 5
2. Решение разрешающего интегрального уравнения специального вида …………………………………………… 7
3. Итерированные ядра и резольвента. Интегральные уравнения резольвенты . . . .…. 10
4. Характеристический полином и минорный ряд А.И. Некрасова . . . . . . ………………………………………………. 12
5. Существование и единственность решения интегро-дифференциального уравнения Фредгольма . . . . …... 18
6. Рекуррентные формулы вычисления коэффициентов характеристического полинома и минорного ряда. . . . …. 21
7. Решение задачи Коши . . . . …… 26
§2. Аналог второй теоремы Фредгольма ………………. 29
1. Минорные ряды высших порядков 29
2. Связь между минорными рядами разрешающего интегрального уравнения специального вида …. ……….. 30
3.Построение фундаментальных функций однородного уравнения соответствующего неоднородному разрешающему интегральному уравнению . . . ……………………… 36
4. Линейная независимость и полнота решений системы фундаментальных функций. Аналог второй теоремы Фредгольма . . . . …………….… 39
5.Специализированная задача Коши 45
§3. Аналог третьей теоремы Фредгольма …………….. 48
1. Связь между детерминантными рядами двух разрешающих интегральных уравнений……………….. 48
2. Связь между решениями двух разрешающих интегральных уравнений……………………………….. 54
3. Общие решения однородных уравнений, соответствующих разрешающим интегральным

уравнениям………………………………………………. 56
4. Построение сопряжённого уравнения………………... 58
§4. Линейные однородные интегро-дифференциальные уравнения при n≤m ……………....................................... 63
1. Общее решение при n≤m……………………………... 63
2. Решение задачи Коши при n≤m……………….............. 67
§5. Линейные неоднородные интегродифференциальные уравнения при n≤m………….. 70
1. Нахождение общего решения при n>m…………....… 70
2. Решение задачи Коши при n>m………………………. 71
3. Линейные неоднородные интегродифференциальные уравнения при n≤m …... 72
4. Решение задачи Коши при n≤m для неоднородных уравнений…………………………………………………… 75
Глава II. Решение линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с использованием фундаментальной системы решений внутреннего дифференциального оператора…………….. 77
§1. Постановка задачи и формулы для производных…. 77
§2. Задача Коши при совпадении порядков внешнего и внутреннего дифференциальных операторов……………… 79
§3. Задача Коши для случая, когда порядок внутреннего дифференциального оператора больше порядка внешнего………………………………………… 90
Глава III. Решение линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма без использования фундаментальных систем решений внешнего и внутреннего дифференциальных операторов………………………………………………...... 110
§1. Преобразования внешнего и внутреннего дифференциальных операторов…………………………….. 110
§2. Построение разрешающего интегрального уравнения и его решение…….……………………………… 114
§3. Решение начальной задачи………………………... 119
Глава IV. Приближённое решение линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма……………….. 124
§1. Решение начальной задачи………………………….. 124
1. Постановка задачи и преобразование внешнего дифференциального оператора……………………………… 124

2. Случай, когда порядок внешнего дифференциального оператора больше порядка внутреннего…………………… 125
3. Случай, когда порядок внешнего дифференциального оператора меньше или равен порядку внутреннего……………………... 127
4. Приближённое решение задачи Коши при n>m……………………………………………………….. 129
5. Приближённое решение задачи Коши при n≤m……………………………………………………….. 131
§2. Решение линейной краевой задачи………………….. 135
1. Постановка задачи и преобразования производных……………………………………………… 135
2. Случай, когда порядок внешнего дифференциального оператора больше внутреннего……………………………… 137
3. Случай, когда порядок внутреннего дифференциального оператора равен или больше порядка внешнего…………………………………………………… 142
Глава V. Линейные интегро-дифференциальные уравнения Фредгольма с отклоняющимся аргументом………………………………………………… 147
§1. Классификация линейных интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом………………………………………………… 147
§2. Функции гибкой структуры (ФГС) и их применение к решению различных задач………………………………. 148
§3. Применение ФГС к преобразованию задачи Коши…………………………………………….................. 151
§4. Применение ФГС к преобразованию краевой задачи…………………………………………………….. 159
Глава VI. Решение разрешающих интегральных уравнений Вольтера-Фредгольма…………………………… 168
§1. Преобразование разрешающих уравнений к единому виду……………………………………………….. 168
§2. Таблицы-схемы обозначений, введенных при решении начальных и краевых задач……………………... 169
§3. Решение разрешающих интегральных уравнений в замкнутом виде…………………………………………….. 173
§4. Приближенные методы решения разрешающих

интегральных уравнений…………………………………….. 180
Вопросы к зачету……………………………………………… 188
Вопросы к экзамену ………………………………………….. 189
Глоссарий …………………………………………………….. 191
Тематика курсовых работ ……………………………………. 192
Тематика дипломных работ …………………………………. 193
Рабочая программа ………………………………………….. 194
Литература……………………………………………………. 199